

خرید کتاب های کنکور

با تخفیف ویژه

و

ارسال رایگان

Medabook.com



مدابوک



یک جله تماس تلفنی رایگان

با مشاوران رتبه برتر

برای انتخاب بهترین منابع

دبیرستان و کنکور

۰۲۱ ۲۸۴۲۵۲۱۰



پیچیده ترین معادله شدی برلیم
 ▲ زدم و نیامد آن به کارم!
 با دیدن لجنه چوماهت...
 احساس عمیق وضوب دارم
 (انگار، ریشه ی **صفتی** دارم!)

فصل ۵



معادله و تابع درجه ی دوم

هر چه درباره ی معادله ی درجه ی دو و دیدگاه تابعی آن بخواهید این جاست...
 روش های حل معادله ی درجه ی دو، روابط بین ریشه هایش، سهمی و ویژگی های آن،
 کاربردهای معادله ی درجه ی دو در حل مسائل مختلف.
 این فصل یکی از مهم ترین آیتم های کنکور شماسه؛ یادتان باشد معادله ی درجه ی
 دو چیزی نیست که در این فصل تمام شود! در ریاضیات تجربی و در بخش های
 مختلف نیاز به مباحث این فصل مُدام احساس می شود؛ درست مثل یکی از چهار
 عمل اصلی...!

تابع و معادله ی درجه ی دو، ابزاری است راه گشا که بدون تسلط به آن شاید بتوان
 گفت نایبنا وارد کنکور شده اید!! حوصله ی زیاد و تست کافی پیشنهاد ما در این
 فصل است...

ایستگاه ۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و بررسی Δ در ریاضی تجربی، حکم یکی از چهار عمل اصلی ریاضی را دارد، از بس کاربردی است.

معادله‌ی درجه‌ی اول و دوم

① معادله‌ی درجه‌ی اول: معادله‌ای بر حسب متغیر x ، که بعد از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان مجهولش ۱ باشد، را معادله‌ی درجه‌ی اول می‌گوییم. فرم کلی این معادله به صورت $ax + b = 0$ و مقدار ریشه‌ی آن هم $x = -\frac{b}{a}$ است. ($a \neq 0$)

این جوری هم ببین: برای حل معادله‌ی درجه‌ی اول، ابتدا عدد ثابت را به سمت راست تساوی منتقل کرده، سپس دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم...

❗ تست: دو برابر عددی را از ۲۵ کم کرده‌ایم و حاصل، نصف همان عدد شده است. مساحت مربعی که طول ضلعش این عدد باشد، کدام است؟

۱۰۰ (۱) ۱۴۴ (۲) ۶۴ (۳) ۲۵۶ (۴)

پاسخ: اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم:

$$25 - 2x = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{مرتب کن}} 25 = \frac{x}{2} + 2x \xrightarrow{\text{ساده کن}} 25 = \frac{x + 4x}{2} \Rightarrow 25 = \frac{5x}{2} \xrightarrow{\text{مضرب ۲ هر دو طرف}} 50 = 5x \xrightarrow{\text{مضرب ۵ هر دو طرف}} 10 = x$$

② معادله‌ی درجه‌ی دوم: معادله‌ای را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن، ۲ باشد معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گوییم. فرم کلی این معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است: که a, b و c سه عدد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است!

معادله‌ی $x^2 = A$

یک معادله‌ی خیلی کاربردی، این است که بعد از ساده کردن معادله، برسیم به عبارت «عدد ثابت = x^2 »، مثل $x^2 = 3$. اگر u ، عبارتی بر حسب x بوده و A هم عددی ثابت باشد، آن وقت:

$A = 0$	$A < 0$	$A > 0$	$u^2 = A$
نتیجه می‌دهد: $u = 0$	ریشه ندارد. آخه عبارت نامنفی u^2 ، هیچ‌گاه برابر عدد منفی نمی‌شود!	نتیجه می‌دهد: $u = \sqrt{A}$ و $u = -\sqrt{A}$	

❗ تست: در معادله‌ی $9(2x + \frac{5}{3})^2 - 1 = 0$ ، مقدار ریشه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۲- (۱) ۱- (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ:

$$9(2x + \frac{5}{3})^2 - 1 = 0 \xrightarrow{\text{انتقال ۱ به سمت راست}} 9(2x + \frac{5}{3})^2 = 1 \xrightarrow{+9} (2x + \frac{5}{3})^2 = \frac{1}{9}$$

$$\xrightarrow{u = 2x + \frac{5}{3}} \begin{cases} 2x + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \\ 2x + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{-\frac{5}{3}} \begin{cases} 2x = -\frac{4}{3} \\ 2x = -2 \end{cases} \xrightarrow{+2} \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه ی کوچکتر}} x = -1$$

$$(x-1)^2 + 3 > 0$$

عبارت «عدد مثبت + u^2 »، همواره مثبت است. ببین:

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش تجزیه

در معادله‌ی درجه‌ی دومی که ضریب x^2 در آن ۱ باشد، به عنوان ساده‌ترین راه، می‌رویم سراغ تجزیه! در این روش معادله‌ی $x^2 + mx + n = 0$ را در نظر می‌گیریم: ① فرم تجزیه‌شده‌ی معادله را می‌نویسیم: $(x + \text{دایره}) (x + \text{دایره}) = 0$ ② برای کامل کردن پرانتزها، به دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان بشود n و جمعشان هم m ③ حالا اون دو تا عددی را که پیدا کردیم جای‌گذاری می‌کنیم و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم. این روش برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، کلی نیست، گاهی دو عدد با ضرب و جمع می‌خواهید پیدا نمی‌کنید.

❗ اگر ضرب چند عبارت، مساوی صفر شود، تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر می‌گذاریم.

❗ تست: در معادله‌ی $x^2 - 20x + 51 = 0$ ، تفاضل ریشه‌ها، کدام ویژگی زیر را دارد؟

۱) عدد فرد ۲) مضرب ۳ ۳) مضرب ۷ ۴) عدد اول

پاسخ: دنبال دو عدد با حاصل ضرب ۵۱ هستیم که جمع آن‌ها -20 باشد! این دو عدد -3 و -17 هستند:

$$x^2 - 20x + 51 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-17)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-17=0 \\ x-3=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=17, x=3 \xrightarrow{\text{تفاضل ریشه‌ها}} 17-3=14 \xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} 14 \text{ مضرب ۷ است.}$$

وقتی که معادله‌ی درجه‌ی دوم عدد ثابت نداشته باشد، **این طوری**: $ax^2 + bx = 0$ ، سریع از x ، فاکتور گرفته و به حاصل ضرب دو عبارت می‌رسیم که مساوی صفر شده است، بعدش معادله حل می‌شود...

این جوری هم ببین: اگر $ax^2 + bx = 0$ شود، ریشه‌ها عبارت‌اند از $x = 0$ و $x = -\frac{b}{a}$. آخه:

تست: مساحت مستطیل مقابل برابر ۶ است. کدام گزینه درباره‌ی x درست است؟
 (۱) عددی زوج است.
 (۲) عددی مربع کامل است.
 (۳) عددی دورقمی است.
 پاسخ:

مساحت مستطیل برابر ۶ است. $S = (3x-3)(x-2) = 6$
 $\Rightarrow (3x-3)(x-2) = 6$
 $\Rightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 6$
 $\Rightarrow 3x^2 - 9x = 0$
 $\Rightarrow 3x(x-3) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ یا $x = 3$
 طول ضلع مستطیل باید مثبت باشد، پس $x = 0$ قابل قبول نیست، در نتیجه $x = 3$ است که عددی اول می‌باشد.

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش مربع کامل

۱) برای این که عبارت $x^2 + bx$ را مربع کامل کنیم باید به آن $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه کنیم.

$$x^2 + bx \xrightarrow{\text{مربع کامل کن}} x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = (x + \frac{b}{2})^2$$

این جوری هم ببین:

۲) برای این که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را با روش مربع کامل حل کنید، مراحل زیر را به ترتیب اجرا کنید:

الف) عدد ثابت را به سمت راست تساوی ببرید و بعد دو طرف را به ضریب x^2 تقسیم کنید:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c \xrightarrow{+a} x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

این جوری هم ببین:

ب) حالا سمت چپ تساوی را همان‌طور که یاد دادیم، مربع کامل کنید و بعد معادله را حل کنید.

ببین: حل معادله‌ی $3x^2 + 2x - 8 = 0$ با روش مربع کامل:

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 8 \xrightarrow{+3} x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{8}{3} \xrightarrow{+ \frac{1}{9}} x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} + \frac{1}{9}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} + \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{25}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \end{cases}$$

ساده‌کن

اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را با روش مربع کامل حل کنیم تا به صورت $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ در آید، (ضریب x داخل پرانتز یک باشد) عددی که باید به دو طرف تساوی اضافه شود $\frac{b^2}{4a^2}$ است و عددی که در نهایت باید از آن جذر بگیریم $\frac{\Delta}{4a^2}$ خواهد بود...

تست: برای حل معادله‌ی $2x^2 + 9x + 4 = 0$ به روش مربع کامل، عددی که باید در سمت راست تساوی از آن جذر بگیریم، کدام است؟

$$\frac{81}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{49}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{49}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{49}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: $2x^2 + 9x + 4 = 0 \xrightarrow{a=2, b=9, c=4} \Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 \Rightarrow \Delta = 49$
 $\xrightarrow{\text{عددی که باید جذر بگیریم}} \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{49}{4(2)^2} = \frac{49}{16}$

۱) برای حل معادله‌ی $25x^2 - 25x + 6 = 0$ با روش مربع کامل، کدام عدد را می‌توانیم به دو طرف تساوی اضافه کنیم؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: $25x^2 - 25x + 6 = 0 \xrightarrow{a=25, b=-25} \frac{b^2}{4a^2} = \frac{(-25)^2}{4(25)^2} = \frac{1}{4}$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش Δ

متداول‌ترین روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، همین است. در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

۱) Δ را پیدا می‌کنیم: $\Delta = b^2 - 4ac$ مقدار ریشه‌ها، در صورتی که Δ منفی نباشد، عبارت‌اند از: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

❶ تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(\sqrt{3}+1)x^2 - x + 1 = \sqrt{3}$ ، ریشه‌ی مثبت کدام است؟

پاسخ: $\sqrt{3}-1$ (۱) $\sqrt{3}+1$ (۲) $2\sqrt{3}-1$ (۳) $2\sqrt{3}-2$ (۴)

$$(\sqrt{3}+1)x^2 - x + 1 = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} (\sqrt{3}+1)x^2 - x + (1-\sqrt{3}) = 0 \xrightarrow{\Delta} \Delta = (-1)^2 - 4(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3}) = 9$$

$$\xrightarrow{\text{پیداکن}} \Delta = 9$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x_1 = \frac{1+3}{2(\sqrt{3}+1)}, x_2 = \frac{1-3}{2(\sqrt{3}+1)} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مثبت}} x_1 = \frac{1+3}{2(\sqrt{3}+1)} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \frac{2}{\sqrt{3}+1} \xrightarrow{\text{مربوب‌کن}} \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}-1$$

دو معادله‌ی درجه‌ی دوم خاص

❶ اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع هر سه ضریب، برابر صفر شود، مثل $5x^2 + 6x - 11 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها همواره ۱ بوده و دیگری هم می‌شود: نسبت عدد ثابت معادله به ضریب x^2

این جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a+b+c=0$ ، آن وقت: $x_1 = 1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$

❷ اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع ضریب‌های اولی و آخری برابر ضریب وسطی باشد، مثل $5x^2 + 6x + 1 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها، همواره -۱ بوده و دیگری هم می‌شود: قرینه‌ی عدد ثابت معادله، تقسیم بر ضریب x^2

این جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a+c=b$ ، در این صورت: $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$

یه سطح بالاتر! در هر معادله‌ای و با هر درجه‌ای که داشته باشد، اگر مجموع همه‌ی ضریب‌ها برابر صفر شود، حتماً یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ بوده است و برای تعیین بقیه‌ی ریشه‌ها، عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم.

❶ تست: در معادله‌ی $(2\sqrt{2}-1)x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$ یکی از ریشه‌ها کدام است؟

پاسخ: $\frac{\sqrt{2}-3}{9}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}-3}{7}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{7}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$ (۴)

$$a=2\sqrt{2}-1, b=-\sqrt{2}, c=1-\sqrt{2} \xrightarrow{a+b+c} (2\sqrt{2}-1) + (-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=1, x=\frac{c}{a} = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \xrightarrow{\text{مربوب‌کن}} x = \frac{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)} \xrightarrow{\text{ضرب‌کن}} \frac{\sqrt{2}-3}{7}$$

تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

وضعیت تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با کمک Δ و به صورت زیر تعیین می‌شود: $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	وضعیت ریشه‌ها
ریشه‌ی حقیقی ندارد.	ریشه‌ی مضاعف دارد. فرمول ریشه‌ی مضاعف: $x = \frac{-b}{2a}$	دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. فرمول ریشه‌ها: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	

منظور از ریشه‌ی مضاعف، وجود دو ریشه‌ی مساوی با همدیگر است. راستی ریشه‌ی مضاعف را گاهی ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی دوم هم می‌گویند.

❶ تست: ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ کدام است؟

پاسخ: $-\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴)

$$x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0 \xrightarrow{\Delta} \Delta = (2m+3)^2 - 4(1)(m^2) \xrightarrow{\text{اتحاد رو بازکن و ساده‌کن}} \Delta = 12m + 9$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} 12m + 9 = 0 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} m = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف رو پیداکن}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-(2m+3))}{2(1)} = \frac{3}{4}$$

کنترل Δ در تست

یادتان باشد هر تستی از معادله‌ی درجه‌ی دوم را که حل کردید و کارتان تمام شد، حتماً در مرحله‌ی آخر باید Δ را کنترل کنید.

❶ چنانچه تست گفته باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است، باید علاوه بر هر شرطی که یافته‌اید، شرط $\Delta > 0$ هم برقرار باشد.

❷ چنانچه تست گفته باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است، باید شرط $\Delta \geq 0$ در کنار تمام فرض‌های مسئله نوشته شده و بررسی شود.

دور زدن Δ !

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، عددهای a و c علامت‌های متفاوت داشته باشند، آن وقت معادله، حتماً دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز است و در این حالت برای قهמידن تعداد ریشه‌ها، نیازی به محاسبه‌ی Δ نداریم!

❶ تست: معادله‌ی $\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$ چند ریشه دارد؟

(۱) هیچ

(۲) یک ریشه‌ی ساده

(۳) ریشه‌ی مضاعف

(۴) دو ریشه‌ی متمایز

پاسخ:

$$\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{دو طرف را در } 4x^2 \text{ ضرب کن}} \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\times 5} 5 - 20x = 12x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 12x^2 + 20x - 5 = 0 \quad a=12, c=-5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله حتماً دو ریشه‌ی متمایز دارد.}$$

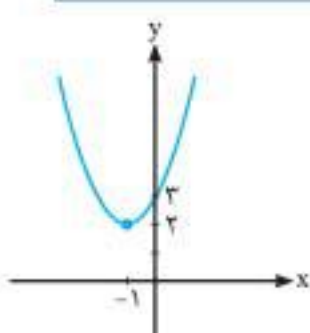
ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

این جا رفتار و ویژگی‌های تابع درجه‌ی دوم را می‌بینید. موضوعی که در کتاب درسی بسیار مفصل به آن پرداخته شده است. رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم و تسلط بر آن، در بیشتر مسائل ریاضی، مهم و کاربردی است.

سهمی

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط‌های $a \neq 0$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود و نمودار این تابع، یک سهمی است.

$y = ax^2 + bx + c$		
$x = -\frac{b}{2a}$ طول رأس:		رأس سهمی
$y = -\frac{\Delta}{4a}$ عرض رأس:		
همچنین می‌توانید با جای‌گذاری طول رأس در تابع، عرض رأس را پیدا کنید.		
به جای x بگذارید صفر؛ همیشه یک نقطه‌ی تلاقی دارد.		تلاقی با محور y ها
$x = 0 \Rightarrow y = c$		
$\Delta > 0$	محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند. (یعنی همان ریشه‌هایش...)	تلاقی با محور x ها
$\Delta = 0$	بر محور x ها مماس است.	
$\Delta < 0$	محور x ها را قطع نمی‌کند.	
$a < 0$	$a > 0$	تأثیر علامت a
دهانه‌ی سهمی رو به پایین است:	دهانه‌ی سهمی رو به بالاست:	
		
ماکزیمم داریم.	مینیمم داریم.	
		محور تقارن (همواره یکی)
$x = -\frac{b}{2a}$		
مختصات رأس سهمی		برای رسم سهمی نیاز است
ریشه‌های آن در صورت وجود؛ که نقطه‌های برخورد با محور x ها هستند.		
نقطه‌ی تلاقی با محور y ها		
رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامت a		



بین: اگر $y = x^2 + 2x + 3$ باشد، آن وقت دهانه‌های سهمی رو به بالاست ($a = 1$) و طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$ و عرض رأس هم می‌شود $y = 1 - 2 + 3 = 2$ یعنی $x = -1$ در سهمی در نقطه‌ی $(-1, 2)$ با محور y ها برخورد می‌کند و معادله‌ی محور تقارنش $x = -1$ است. از آنجایی که $\Delta = 4 - 12 = -8$ است، ریشه هم ندارد.

منظور از کمترین یا بیشترین مقدار سهمی، همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

تست: کمترین مقدار تابع $y = kx^2 - 8x + (6k - 1)$ برابر با ۳ است. طول رأس سهمی کدام است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)

پاسخ: عبارت درجه‌ی دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس $a > 0$ بوده است که در این جا می‌شود $k > 0$. خوب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است:

$$\begin{aligned} kx^2 - 8x + (6k - 1) &= 0 \xrightarrow[\Delta = b^2 - 4ac]{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = 64 - 4(k)(6k - 1) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 64 - 24k^2 + 4k \\ \xrightarrow[\frac{-\Delta}{4a}]{\text{فرمول عرض رأس}} \frac{64 - 24k^2 + 4k}{4k} &= \frac{3}{\text{فرض تست}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 24k^2 - 4k - 64 = 12k \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24k^2 - 16k - 64 = 0 \xrightarrow{+8} 3k^2 - 2k - 8 = 0 \\ \xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta &= 4 - 4(3)(-8) = 100 \Rightarrow k = \frac{2 \pm 10}{6} = 2 \text{ و } -\frac{8}{6} \xrightarrow{k > 0} k = 2 \xrightarrow{\text{طول رأس}} x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-8}{2k} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

چنانچه سهمی از نقطه‌ی (m, n) بگذرد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

تست: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x = -2$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(-1, -1)$ بگذرد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

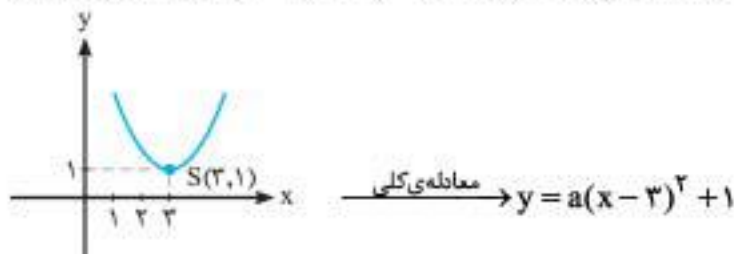
- ۱۷ (۴) ۱۵ (۳) ۱۳ (۲) ۱۱ (۱)

پاسخ:

$$\begin{aligned} 1 \quad y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = -2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} b = 4a \\ 2 \quad y = 5 \xrightarrow{x=0} c = 5 \\ 3 \quad (-1, -1) \xrightarrow{\text{در سهمی}} -1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=5} a - b = -6 \xrightarrow{b=4a} a - 4a = -6 \xrightarrow{\text{طبق ۱}} a = 2 \\ \xrightarrow{\text{حل کن}} a = 2 \xrightarrow{b=4a} b = 8 \Rightarrow a + b + c = 2 + 8 + 5 = 15 \end{aligned}$$

نوشتن معادله‌ی سهمی

۱ اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(h, k)$ داده شده باشد: در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال، a را پیدا کنید. **ببین:**



تست: معادله‌ی سهمی مقابل کدام است؟

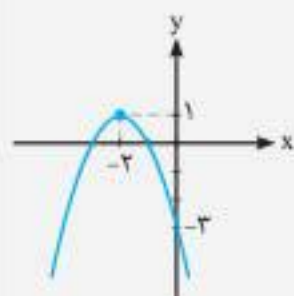
۱ $y = -x^2 + 4x - 3$

۲ $y = -x^2 - 4x - 3$

۳ $y = -x^2 - 4x + 3$

۴ $y = x^2 - 4x - 3$

پاسخ:



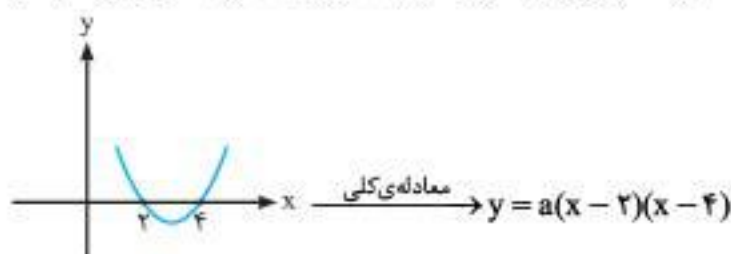
$$S(-2, 1) \xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی سهمی}} y = a(x - h)^2 + k \xrightarrow[\text{جایگذاری کن}]{h = -2, k = 1} y = a(x + 2)^2 + 1$$

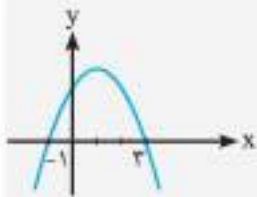
سهمی از نقطه‌ی $(0, -3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه را در معادله‌ی آن صدق می‌دهیم:

$$y = a(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow{x=0, y=-3} -3 = a(0 + 2)^2 + 1 \Rightarrow -3 = 4a + 1 \xrightarrow{\text{حل معادله}} a = -1 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y = -1(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} y = -x^2 - 4x - 3$$

همان‌طور که دیدید برای کار کردن با سهمی‌هایی که معادله‌ی آن‌ها به فرم $y = a(x - h)^2 + k$ نوشته شده است، می‌توانید اتحاد مربع دو جمله‌ای موجود را باز کرده و عبارت را ساده کنید.

۲ اگر نقاط تلاقی سهمی با محور x ها به فرم x_1 و x_2 باشند، در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال a را به دست بیاورید. **ببین:**





تست: سهمی مقابل از نقطه‌ی $(-2, -10)$ می‌گذرد، نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y ها چه عرضی دارد؟

۱۰ (۲)

۵ (۱)

۶ (۴)

۸ (۳)

پاسخ: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ جایگذاری کن $y = a(x + 1)(x - 3)$ ضرب کن $y = a(x^2 - 2x - 3)$ $(-2, -10)$ جایگذاری کن $-10 = a(4 + 4 - 3) \Rightarrow -10 = 5a \Rightarrow a = -2$ در معادله‌ی سهمی $y = -2(x^2 - 2x - 3)$ تلاقی با محور y ها $x = 0$ $y = -2(-3) = 6$

در حالت خاص که معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعف x دارد، معادله‌اش به صورت $y = a(x - x_0)^2$ در می‌آید...

قرارداد: ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را برای تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، **صف‌های سهمی** می‌نامیم.

مماس بودن سهمی بر خط

اگر خط دلخواه $y = mx + n$ بر یک سهمی مماس شده باشد، به جای y سهمی بگذارید: $mx + n$ و سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله‌ی آخری قرار دهید: $\Delta = 0$...

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورها مماس است؟ (خارج ۹۳)

۱۲ (۴)

۱۲ و -۴ (۳)

۴ (۲) و -۱۲

-۴ (۱)

پاسخ: $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ نیمساز ناحیه‌ی اول: $y = x$ جای گذاری کن $x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$

ساده و مرتب کن $x = 2x^2 + mx + x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$

مماس یعنی $\Delta = 0$ $m^2 - 4(2)(m+6) = 0$ ساده کن $m^2 - 8m - 48 = 0$ تجزیه کن $(m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$

اگر $m = 12$ باشد، معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از: $2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{m=12} 2x^2 + 12x + 18 = 0$ که به‌وضوح جوابش $x = -3$ است و در ناحیه‌ی اول نیست! پس فقط $m = -4$ قابل قبول خواهد بود.

وضعیت کامل یک سهمی نسبت به محور x ها

۱ اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه قطع کند، در این صورت $\Delta > 0$ بوده است.

۲ اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه قطع نکند، در این صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور x ها یکی از چهار حالت زیر را دارد:

همواره بالای محور	بالای محور، مماس بر آن	همواره پایین محور	پایین محور، مماس بر آن	شرط
$a > 0$ و $\Delta < 0$	$a > 0$ و $\Delta = 0$	$a < 0$ و $\Delta < 0$	$a < 0$ و $\Delta = 0$	

جمله‌ی مربع کامل شدن عبارت درجه‌ی دوم، یعنی در آن عبارت، Δ مساوی صفر شده ...

تست: همه‌ی نقاط نمودار تابع $y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}$ بالای محور x ها است. چند جواب طبیعی و یک رقمی برای m وجود دارد؟

چهار (۴)

سه (۳)

دو (۲)

یک (۱)

پاسخ: $y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}$ $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(m+1)(\frac{1}{4})$ ساده کن $\Delta = 7 - m$

سهمی بالای محور x ها است $\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 7 - m < 0 \Rightarrow m > 7 \\ a > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \cap m > 7 \xrightarrow{m \text{ طبیعی و یک رقمی}} m = 8, 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} \text{دو تا}$

هرگاه نمودار تابع $y = (k-2)x^2 - 3x + 2 + k$ پایین محور x ها و بر آن مماس باشد، در این صورت چند مقدار برای k وجود دارد؟

بی‌شمار (۴)

دو (۳)

یک (۲)

هیچ (۱)

پاسخ: $y = (k-2)x^2 - 3x + (2+k)$ $\Delta = (-3)^2 - 4(k-2)(k+2)$ ساده کن $\Delta = -4k^2 + 25$

پایین محور x ها و مماس بر آن $\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow -4k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2} \\ a < 0 \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2 \end{cases} \cap k = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} \text{یکی}$

عبارت درجه‌ی دوم با علامت ثابت: یک تیر و دو نشان!

نتیجه‌ی بسیار مهم و البته کنکوری جدول قبلی که درباره‌ی وضع سهمی و محور x ها گفتیم، این است که اگر بگویند عبارت درجه‌ی دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است، خوب انگار سهمی آن کاملاً بالا یا کاملاً پایین محور x ها افتاده...

این جوری هم ببین:

$ax^2 + bx + c \leq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	شرط
$\Delta \leq 0$ و $a < 0$	$\Delta < 0$ و $a < 0$	$\Delta \leq 0$ و $a > 0$	$\Delta < 0$ و $a > 0$	

❶ تست: به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 5$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

$$m > 1 \quad (1)$$

$$1 < m < \frac{14}{5} \quad (2)$$

$$m > \frac{14}{5} \quad (3)$$

$$m \geq \frac{14}{5} \quad (4)$$

پاسخ:

$$(m-1)x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (6)^2 - 4(m-1)(5) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 36 - 20m$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت همواره مثبت}} \text{سهیمی بالای محور } x \text{ ها} \begin{cases} \text{① } \Delta < 0 \Rightarrow 36 - 20m < 0 \Rightarrow m > \frac{14}{5} \\ \text{② } a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases} \cap \rightarrow m > \frac{14}{5}$$

ویژگی محور تقارن سهیمی

❶ محور تقارن سهیمی همیشه از رأس سهیمی می‌گذرد و موازی محور y هاست.

این جوری هم ببین: طول رأس سهیمی، همیشه با مقدار داده شده برای محور تقارن سهیمی مساوی است: **ببین:** $x = 4 \Rightarrow$ طول رأس $= 4$ معادله‌ی محور تقارن

❷ هر دو نقطه‌ای که روی سهیمی بوده و عرض مساوی با هم داشته باشند، نسبت به محور تقارن سهیمی قرینه‌اند. در این حالت برای پیدا کردن مقدار عددی محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرید، **ببین:**

$$A(-3, 4), B(5, 4) \xrightarrow[\text{میانگین طول ها}]{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = \frac{-3 + 5}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x = 1$$

دو نقطه با عرض مساوی روی سهیمی

❶ تست: دو نقطه‌ی $(1, \beta)$ و $(-3, \beta)$ روی نمودار سهیمی با کمترین مقدار a قرار دارند. اگر سهیمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 3 قطع کند، کدام نقطه روی این سهیمی واقع است؟

$$(-3, 14) \quad (1)$$

$$(-2, 2) \quad (2)$$

$$(-2, 3) \quad (3)$$

$$(-3, 13) \quad (4)$$

پاسخ: ابتدا معادله‌ی سهیمی را در حالت کلی، $y = ax^2 + bx + c$ فرض می‌کنیم:

$$\text{① } (1, \beta), (-3, \beta) \xrightarrow[\text{دو نقطه با عرض مساوی روی سهیمی}]{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = \frac{1 + (-3)}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x = -1 \xrightarrow{\text{محور تقارن از رأس می‌گذرد}} \text{رأس } x = -1$$

$$\text{② } y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{x=-1} -\frac{b}{2a} = -1 \xrightarrow{\text{ساده کن}} b = 2a$$

$$\text{③ } \text{رأس } x = -1 \xrightarrow{\text{در سهیمی بنذار}} a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\text{مساوی ا بنذار}} a - b + c = 1 \xrightarrow[\text{طبق ②}]{b=2a} -a + c = 1$$

$$\text{④ } \text{سهیمی محور } y \text{ ها را در } 3 \text{ قطع می‌کند} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} x=0, y=3 \rightarrow c=3 \xrightarrow[\text{طبق ③}]{-a+c=1} a=2 \xrightarrow[\text{طبق ②}]{b=2a} b=4$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} \text{معادله‌ی سهیمی: } y = 2x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{\text{امتحان گزینه‌ها}} 3 = 2(-2)^2 + 4(-2) + 3 \quad \checkmark \text{ گزینه‌ی «۳»}$$

تابع چاق و لاغر

تابعی را که ضابطه‌اش به صورت یک عبارت درجه‌ی اول، ضربدر یک عبارت درجه‌ی دوم باشد تابع چاق و لاغر می‌نامیم، مثل: $y = \frac{(2x-1)(x^2+5x-4)}{\text{چاق لاغر}}$

❶ اگر تست بگوید: «تابع چاق و لاغر، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند»، دلتای تابع درجه‌ی دوم را منفی کنید...

❶ تست: نمودار تابع $y = (x+2)(x^2-2x+m)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مقادیر m به کدام صورت است؟

$$m > 1 \quad (4)$$

$$-2 < m < -1 \quad (3)$$

$$m > -1 \quad (2)$$

$$0 < m < 1 \quad (1)$$

پاسخ:

$$y = (x+2)(x^2-2x+m) \xrightarrow{\Delta \text{ چاق رو حساب کن}} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(m) = 4 - 4m \xrightarrow[\Delta < 0]{\text{تلیع فقط یک ریشه دارد}} 4 - 4m < 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m > 1$$

❷ اگر تست بگوید: «تابع چاق و لاغر، بر محور x ها مماس است»، در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

الف) دلتای عبارت درجه‌ی دوم صفر بوده است.

ب) ریشه‌ی عبارت درجه‌ی اول (همون لاغره) باید ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم باشد.

❶ تست: نمودار تابع $y = (\frac{1}{3}x - k)(x^2 + 2x - 3)$ بر محور x ها مماس است. در این صورت تفاضل مقادیر k کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: همان‌طور که می‌بینید در قسمت چاق، Δ نمی‌تواند صفر شود:
 $x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta \text{ چاق رو حساب کن}} \Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16$
 پس می‌ماند یک راه! ریشه‌ی عبارت لاغر باید در تابع چاق صدق کند تا نمودار تابع بر محور x ها مماس شود:
 $\frac{1}{3}x - k = 0 \xrightarrow{\text{ریشه رو حساب کن}} \frac{1}{3}x = k \Rightarrow x = 3k \xrightarrow{\text{بذار توی تابع درجه‌ی دوم}} (3k)^2 + 2(3k) - 3 = 0$
 $\xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم با نومی برابر است}} 9k^2 + 6k - 3 = 0 \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left(\frac{1}{3}\right) - (-1) = \frac{4}{3}$
 $\xrightarrow{\text{ساده کن}} 9k^2 + 6k - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم با نومی برابر است}} k = -1, k = \frac{3}{9}$

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم



قسمتی شیرین و کنکوری! بیشتر دانش‌آموزان کار با S و P را دوست دارند و چه چیزی بهتر از این که این بخش سهم خوبی در کنکور هم داشته باشد...

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم: S و P

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض $\Delta > 0$ و وجود دو ریشه به نام‌های α و β ، داریم:

نماد	بر حسب ریشه‌ها	بر حسب ضرایب‌ها
مجموع دو ریشه	$\alpha + \beta$	$-\frac{b}{a}$
حاصل ضرب دو ریشه	$\alpha\beta$	$\frac{c}{a}$

❶ تست: عدد $\frac{5}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2 - 6x - 4m - 1 = 0$ است. حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟
 $-\frac{35}{9}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{35}{9}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)
 پاسخ:
 $x = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{بذار توی معادله}} m\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{5}{3}\right) - 4m - 1 = 0 \xrightarrow{\times 9} 25m - 90 - 36m - 9 = 0$
 $\xrightarrow{\text{ریشه در معادله صدق می‌کند}} -11m - 99 = 0 \Rightarrow m = -9 \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} -9x^2 - 6x + 35 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{35}{-9}$

رابطه‌ای بین ریشه‌ها در تست حضور دارد...

هر تستی که در آن «رابطه‌ای مشخص» بین دو تا ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو داده شده باشد، حتماً با روش S و P حل می‌شود؛ برای این منظور بنویسید:

$$\text{❶ } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{❷ } \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{❸ رابطه‌ای که تست بین دو ریشه داده است!}$$

حالا با کمک سه رابطه‌ی بالا و جای‌گذاری، پارامتر موجود در تست را پیدا کنید...

❶ تست: در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ (خارج ۹۳)
 10 (۱) 12 (۲) 14 (۳) 15 (۴)
 پاسخ:
 $x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{❶ } \alpha + \beta = -\left(-\frac{8}{1}\right) = 8 \\ \text{❷ } \alpha\beta = \frac{m}{1} = m \end{cases}$
 $\text{❸ } \alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \xrightarrow{\text{بذار توی ❶}} \left(\frac{\beta}{2} + 5\right) + \beta = 8 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{\beta}{2} + \beta = 3 \xrightarrow{\times 2} \beta + 2\beta = 6 \Rightarrow 3\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 \xrightarrow{\text{بذار توی ❶}} \alpha + 2 = 8 \Rightarrow \alpha = 6 \xrightarrow{\text{بذار توی ❷}} 6 \times 2 = m \Rightarrow m = 12$

کنترل Δ

در تستی که با S و P حل کرده‌اید و برای پارامتر موجود در سؤال، دو مقدار به دست آورده‌اید، یادتان باشد برای هر کدام کنترل کنید که Δ مثبت می‌شود یا منفی؟! چنانچه به ازای پارامتری، $\Delta < 0$ شود آن مقدار پارامتر، قابل قبول نیست!

این جوړی هم ببین: خود S و P به تنهایی، لزوماً وجود ریشه را برای معادله‌ی درجه‌ی دوم تضمین نمی‌کنند، حتماً چک Δ لازم است...

❶ این طوری بدانید که کنترل Δ همیشه لازم است، مگر این که $\frac{c}{a} < 0$ شود...

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \xrightarrow{\text{همه رو به سمت چپ}} mx^2 + 3x + (m^2 - 2) = 0 \xrightarrow{P \text{ و } S \text{ رو تشکیل بده}} \begin{cases} \text{۱} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{m} \\ \text{۲} \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 2}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\alpha = \frac{1}{\beta}} \alpha\beta = 1 \xrightarrow{\text{در ۲ بذار}} 1 = \frac{m^2 - 2}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} m^2 - 2 = m \xrightarrow{\text{مرتب کن}} m^2 - m - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} m = -1, m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله جای گذاری کن}} \begin{cases} m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \\ m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کنترل } \Delta} \begin{cases} \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 5 \text{ ق ق} \\ \Delta = 9 - 4(2)(2) = -7 \text{ غ ق} \end{cases} \Rightarrow m = -1$$

$\alpha = k\beta$

اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم، k برابر ریشه‌ی دیگر است، غیر از روش کلی که در قسمت قبل گفتیم، می‌توانید سریع قرار

دهید: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$ و پارامتر را پیدا کنید.

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + mx + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی معادله، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $3/5$ ۲) $4/2$ ۳) $4/5$ ۴) $5/4$

پاسخ:

$$2x^2 + mx + 9 = 0 \xrightarrow{\text{یک ریشه } k \text{ برابر دیگری}} \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \xrightarrow{k=2} \frac{m^2}{2 \times 9} = \frac{(2+1)^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2}{18} = \frac{9}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} m^2 = 81 \Rightarrow m = \pm 9 \Rightarrow \begin{cases} m = -9 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} 2x^2 - 9x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -\left(-\frac{9}{2}\right) = 4/5 \\ m = 9 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} 2x^2 + 9x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{2} = -4/5 \end{cases}$$

دومی در گزینه‌ها موجود نیست.

محاسبه‌ی رابطه‌های معروف بین ریشه‌ها بر حسب P و S

در این مدل از تست‌ها، یک معادله‌ی درجه‌ی دو دارید که خب پارامتر هم ندارد و قرار است عبارتی را که بر حسب ریشه‌ها داده شده است، حساب کنید. مثل مجموع مکعبات ریشه‌ها یا هر چیز دیگری! طبق جدول زیر موارد مهم را به خاطر بسپارید:

مدل اول) معروف‌ها:

به فارسی	بر حسب ریشه‌ها	حاصل عبارت خواسته‌شده بر حسب P و S
۱ مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^2 + \beta^2$	$S^2 - 2P$
۲ مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^3 + \beta^3$	$S^3 - 3SP$
۳ قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها	$ \alpha - \beta $	$\sqrt{S^2 - 4P}$ یا $\frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$
۴ مجموع جذرهای ریشه‌های مثبت	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

اینم دلیلش: واسه اثبات حالت‌هایی شبیه به ۲ و ۴، عبارت را مساوی k گرفته و به توان ۲ برسانید و بعد حسابشون کنید، ببین:

$$\text{۴} \quad k = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} k = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \xrightarrow{\text{نتیجه}} |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

تست: در معادله‌ی $x^2 - 8x + 4 = 0$ ریشه‌ها را α و β نامیده‌ایم. حاصل تقسیم $\alpha^2 + \beta^2$ به $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ چقدر است؟

۱) $\frac{56\sqrt{3}}{3}$ ۲) $28\sqrt{3}$ ۳) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ ۴) $56\sqrt{3}$

پاسخ:

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 8 \\ P = \alpha\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 8^2 - 2(4) = 56 \\ \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{4}} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \frac{56}{\sqrt{12}} = \frac{56}{2\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{مویایی}} \frac{56 \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{28\sqrt{3}}{3}$$

 ① در معادله‌ی $x^2 + 3x - 1 = 0$ حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۳۶ (۱)

-۳۶ (۲)

۲۷ (۳)

-۲۷ (۴)

پاسخ:

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -3 \\ P = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرمول}} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP = (-3)^2 - 2(-3)(-1) = -۳۶$$

 ① یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (m+3)x + 3m = 0$ از دیگری ۵ واحد بیشتر است. m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۲ (۱)

-۲ (۲)

-۸ (۳)

۶ (۴)

پاسخ:

$$\alpha = 5 + \beta \Rightarrow \alpha - \beta = 5 \xrightarrow{\text{رابطه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲ بیرون}} \Delta = 25a^2 \Rightarrow (m+3)^2 - 4(1)(3m) = 25(1)^2$$

Δ معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$\xrightarrow{\text{اتحاد رو ساده کن}} m^2 - 6m + 9 = 25 \Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m = 8, -2$$

مدل دوم) غیر معروف‌ها:

اگر حاصل عبارتی را که بر حسب ریشه‌ها نوشته شده، خواستند و جزء جدول مدل اول نبود، ابتدا عبارت را با عملیات جبری مانند مخرج مشترک گیری، فاکتورگیری و اتحاد ساده می‌کنیم؛ با این هدف که در آن‌ها فقط $\alpha\beta$ و $\alpha + \beta$ یا عبارت‌های معروفی که در جدول گفتیم دیده شود، بعدش عبارت را بر حسب S و P نوشته و حاصل آن را از روی معادله پیدا می‌کنیم.

 ① تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)

پاسخ:

$$1) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \xrightarrow[\text{مخرج جنر P است}]{\text{صورت جزء جدول است}} \frac{\sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

$$2) 4x^2 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -(-12/4) = 3 \\ P = 1/4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری در 1}} \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{1/4}}}{\sqrt{1/4}} = \frac{\sqrt{3 + 2(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3 + 1}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

 ① در معادله‌ی $2x^2 + 7x - 20 = 0$ با ریشه‌های α و β ، حاصل $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کدام است؟

-۳۵ (۱)

۴۵ (۲)

۳۵ (۳)

-۴۵ (۴)

پاسخ:

$$1) 2x^2 + 7x - 20 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{2}, P = \frac{c}{a} = \frac{-20}{2} = -10$$

$$2) \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\text{از } \alpha\beta \text{ فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{بر حسب S و P بنویس}} PS \xrightarrow[\text{جای گذاری کن}]{\text{طبق 1}} (-10)(-\frac{7}{2}) = ۳۵$$

مدل سوم) رابطه‌ی غیر متقارن بین ریشه‌ها:

در این مدل، α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و رابطه‌ای غیر متقارن بین α و β خواسته شده است. مثل $\alpha^2 + 5\beta = ?$. خوب در این حالت کافی است بدانید α و β (هر دو) در معادله صدق می‌کنند، یعنی باید اول کار (مثلاً) با گذاشتن α در معادله‌ی درجه‌ی دوم رابطه‌ای برای α به دست بیاورید تا آن را در عبارت خواسته شده بگذارید و بعد به رابطه‌های معروف برسید...

 ① تست: α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 5 = 0$ هستند. حاصل $\alpha^2 + 2\beta$ کدام است؟

۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

پاسخ:

$$\alpha^2 + 2\beta = ? \xrightarrow{\text{در معادله بنذار}} \alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} (2\alpha + 5) + 2\beta = ?$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) + 5 = ? \Rightarrow 2S + 5 = ? \xrightarrow{S = -\frac{b}{a} = 2} 2(2) + 5 = 9$$

بحث درباره‌ی علامت ریشه‌ها فقط با کمک S و P

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی $\Delta > 0$ باشد و در واقع معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، می‌توانید بدون آن که معادله را حل کرده و ریشه‌هایش را پیدا کنید، فقط با کمک علامت S و P درباره‌ی علامت ریشه‌ها اظهار نظر کنید.

این جوری هم ببین: یادت باشه اگه علامت ریشه‌ها رو خواستن، به یاد علامت S و P بیفتی...

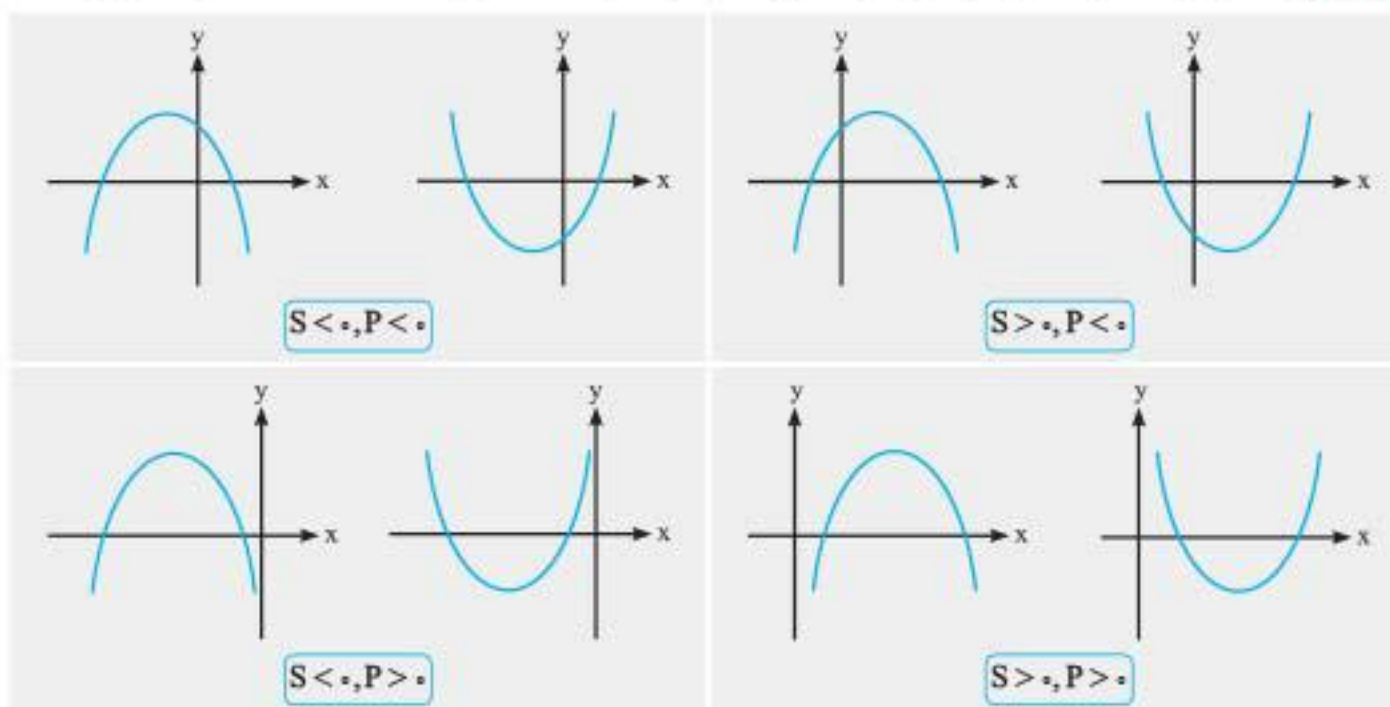
وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

$\Delta > 0$	$P > 0$	$P < 0$
$S > 0$	هر دو ریشه مثبت هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و ریشه‌ی مثبت از قدر مطلق ریشه‌ی منفی، بزرگ‌تر است: مثل ۴ و -۲.
$S < 0$	هر دو ریشه منفی هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و قدر مطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت، بزرگ‌تر است: مثل -۵ و ۲.

۱ اگر $S = 0$ و $P \neq 0$ باشد، یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد: مثل ۳ و -۳. در این حالت حتماً P منفی است.

۲ اگر $P = 0$ باشد، یعنی معادله حتماً یک ریشه‌ی صفر دارد.

این جوری هم ببین: چهار حالتی را که در جدول قبل آوردیم، به‌صورت نموداری هم ببینید: برای $y = ax^2 + bx + c$ و با فرض $\Delta > 0$ ، داریم:



❗ **تست:** کدام یک از معادله‌های زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟

(۴) $x^2 - 4x + 2 = 0$

(۳) $x^2 + 8x + 1 = 0$

(۲) $x^2 - 2x + 4 = 0$

(۱) $x^2 - 4x - 2 = 0$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

* علامت ریشه‌ها مختلف است. $\frac{c}{a} \rightarrow P = -2 \Rightarrow$ گزینه‌ی «۱»

* اصلاً ریشه ندارد. $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ گزینه‌ی «۲»

* هر دو ریشه منفی‌اند. $\frac{b}{a} \rightarrow S = -8 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم علامت‌اند $\frac{c}{a} \rightarrow P = 1 \Rightarrow$ گزینه‌ی «۳»

اما در گزینه‌ی «۴»، $P = 2$ و $S = 4$ است که یعنی وجود دو ریشه‌ی مثبت: در ضمن Δ آن هم مثبت است...

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

برای تسلط به این بخش، پیشنهاد می‌کنیم حتماً ایستگاه ۳ را خوب خوانده باشید و تست‌های آن را زده باشید. چون می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دوم بنویسیم...

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با داشتن S و P آن

اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی را داشته باشید، که آن‌ها را به ترتیب S و P می‌نامیم، آن وقت معادله‌ی درجه‌ی دوم مورد نظر

می‌شود: $x^2 - Sx + P = 0$

این جوری هم ببین: اگر دو تا عدد حقیقی α و β را بخواهید به‌طوری که جمع آن‌ها مساوی عدد معلوم S و ضربشان هم P باشد، برای پیدا کردن این دو عدد باید معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنید...

❶ **تست:** ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر، $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ هستند؟

$$(1) \quad x^2 + 4x - a = 0 \quad (2) \quad x^2 + ax + 4 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 4x + a = 0 \quad (4) \quad x^2 + ax - 4 = 0$$

پاسخ:

$$\alpha = 2 + \sqrt{4-a}, \beta = 2 - \sqrt{4-a} \begin{cases} \text{جمع کن} \rightarrow S = (2 + \sqrt{4-a}) + (2 - \sqrt{4-a}) = 4 \\ \text{ضرب کن} \rightarrow P = (2 + \sqrt{4-a}) \times (2 - \sqrt{4-a}) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} P = 4 - (4-a) = a \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow[S=a]{S=4} x^2 - 4x + a = 0$$

پس معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر برابر است با:

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با کمک معادله‌ای دیگر؛ دو معادله‌ی درجه‌ی دوم در یک تست!

در این مدل تست‌ها، دوتا معادله‌ی درجه‌ی دوم بهتون میدن! ریشه‌های معادله‌ی اولی α و β فرض می‌شوند و ریشه‌های معادله‌ی دوم هم برحسب α و β داده می‌شوند؛ خب شما S و P معادله‌ی اول را حساب می‌کنید، بعدش مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های دومی را تشکیل می‌دهید و S' و P' می‌نامید. حالا باید S' و P' را با ساده کردن و عملیات جبری برحسب S و P ساخته و حساب کنید، خب حالا S' و P' هم معلوم شده، دیگه برو واسه خودت!

❶ **تست:** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

$$(1) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 7 \quad (4) \quad 9$$

پاسخ:

$$1) \quad 2x^2 - 3x = 1 \xrightarrow{\text{ترتیب کن}} 2x^2 - 3x - 1 = 0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = \frac{3}{2} = \alpha + \beta \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = -\frac{1}{2} = \alpha\beta \end{cases}$$

$$2) \quad 8x^2 + kx - 1 = 0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S' = -\frac{k}{8} = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P' = -\frac{1}{8} = (\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2) \end{cases}$$

حالا ساده می‌کنیم:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{برحسب } S \text{ و } P \text{ جای گذاری کن}} PS \xrightarrow{\text{طبق 1}} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{طبق 2}} -\frac{k}{8} = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \xrightarrow{\times(-8)} -\frac{k}{8} = -\frac{3}{4} \times (-8) \rightarrow k = 6$$

گاهی تست، ریشه‌های معادله‌ی اولی را به زبان ریاضی برایتان α و β اعلام نمی‌کند؛ بلکه رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی دومی و معادله‌ی اول را به صورت قارسی به شما می‌دهد، باز هم مراحل شما قرقی با قبل ندارد. ریشه‌های اولی را α و β بگیرید و از روی جملات قارسی داده شده، ریشه‌های دومی را برحسب α و β بنویسید و بعد هم دقیقاً مثل قبل عمل کنید...

❶ **تست:** ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمترند؟ (کنکور ۹۴)

$$(1) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 5x + 2 = 0$$

پاسخ:

$$1) \quad 2x^2 - 3x - 1 = 0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = \frac{3}{2} \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{فرم ریشه‌های دومی رو بنویس از معکوس، یک واحد کمتر}} \left\{ \frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1 \right\}$$

$$2) \quad \text{معادله‌ی دوم:} \begin{cases} S' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 \Rightarrow S' = \frac{S}{P} - 2 \\ P' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \times \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عددهای 1 رو جای گذاری کن}} \begin{cases} S' = \frac{S}{P} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -5 \\ P' = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = -2 + 3 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دوم رو بنویس}} x^2 + 5x + 2 = 0$$

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

در این بخش به سؤالاتی می‌پردازیم که شاید در ظاهر معادله‌ی درجه‌ی دوم نباشند اما با تغییر متغیر یا تبدیل مدل ریاضی آن، درجه‌ی دوم می‌شوند. تست‌های ماکزیمم و مینیمم کردن در این بخش، خیلی مهم هستند...

معادلاتی که با تغییر متغیر به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود

در بعضی معادله‌ها، که خوب نه درجه‌ی اول هستند و نه درجه‌ی دوم، عبارتی را می‌بینیم که یک بار با توان ۱ و یک بار هم با توان ۲ حضور دارد. در این حالت کافی است اسم آن عبارت را متغیر جدیدی مثل t ، در نظر بگیریم تا عبارت درجه‌ی دومی بر حسب t دربیاید و بعد آن را حل کنیم. در آخر که مقدار t به دست آمد، آن را مساوی عبارت خودش گذاشته و دوباره معادله‌ی دیگری را حل می‌کنیم تا x به دست بیاید.

تست ۱: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: $t = 12, t = 6$ ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow (t-12)(t-6) = 0$ تجزیه کن $\rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0$ بذار در معادله $x^2 + x = t$

برای مقدار اولیه‌ی t بذار $\rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$ حل کن $\rightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) = 0 \\ (x-2)(x+3) = 0 \end{cases}$ ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow x = -4, 3, 2, -3$ جمع ریشه‌ها $\rightarrow -2$

اگر در معادله‌ای، یکی از جمله‌ها مجذور دیگری بود، روش حل آن تغییر متغیر و استفاده از معادله‌ی درجه‌ی دو است: **ببین:**

الف) $x^6 + 3x^3 - 4 = 0 \xrightarrow{x^3=t} t^2 + 3t - 4 = 0$

ب) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 5t + 4 = 0, t \geq 0$

تست ۱: معادله‌ی $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - 6 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

(۱) هیچ

(۲) دو

(۳) چهار

پاسخ:

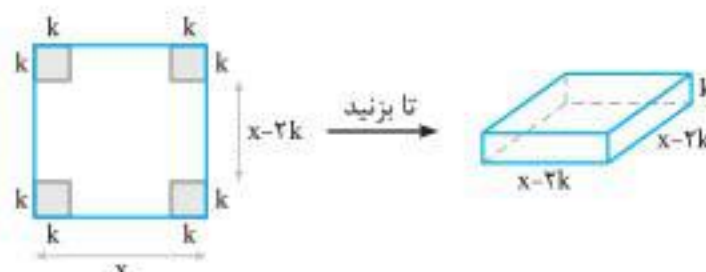
$x^2 = t$ در معادله بذار $\rightarrow t^2 - 2\sqrt{3}t - 6 = 0$ $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 36$ $\Delta = b^2 - 4ac$ را پیدا کن

ریشه‌ها رو پیدا کن $\rightarrow t = \frac{2\sqrt{3} \pm 6}{2} = \sqrt{3} + 3$ و $\sqrt{3} - 3$ $\xrightarrow{x^2=t}$ $\begin{cases} x^2 = 3 + \sqrt{3} \xrightarrow{\text{جنر بگیر}} x = \pm\sqrt{3 + \sqrt{3}} \\ x^2 = \sqrt{3} - 3 \xrightarrow{x^2 \geq 0} \text{امکان ندارد. منفی است} \end{cases}$ تعداد ریشه $\rightarrow 2$ تا

مسئله‌های کاربردی معروف از معادله‌ی درجه‌ی دوم

تعداد بازی‌ها	در یک دوره بازی که هر تیم با هر کدام از تیم‌های دیگر فقط یک بازی انجام می‌دهد، با فرض داشتن n تیم، تعداد بازی‌ها یک عبارت درجه‌ی دوم است.	۱) تعداد بازی‌ها $= \frac{n(n-1)}{2}$
ساختن قوطی	اگر چهار مربع کوچک به ضلع k را از گوشه‌های مربعی برش بزنیم و با تا زدن صفحه یک جعبه به حجم V بسازیم.	۲) ساختن قوطی $= \sqrt{\frac{V}{k}} + 2k$ ضلع مربع اصلی
حصار کشی	با یک رشته سیم به طول ℓ ، می‌خواهیم مستطیلی به مساحت S بسازیم.	۳) حصار کشی $= \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16S}}{4}$ یکی از اضلاع مستطیل

اینم شکل قوطی:



❶ **تست:** می‌خواهیم با بریدن چهار مربع به ضلع ۳ در گوشه‌های یک صفحه‌ی مربعی شکل و بعد تا کردن آن، یک ظرف به حجم ۷۵ بسازیم. ضلع مربع را باید چند در نظر بگیریم؟

پاسخ: ۱۱ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)

$$x = \sqrt{\frac{V}{k}} + 2k \xrightarrow{V=75, k=3} x = \sqrt{\frac{75}{3}} + 2(3) = \sqrt{25} + 6 = 5 + 6 = 11$$

❶ با یک طناب ۱۵ متری می‌خواهیم دور تادور مستطیلی به مساحت ۹ را کاملاً بپوشانیم. ضلع کوچک‌تر مستطیل کدام است؟

پاسخ: ۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴)

$$a = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16S}}{4} \xrightarrow{\ell=15, S=9} a = \frac{15 + \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 + \sqrt{81}}{4} = \frac{15 + 9}{4} = 6$$

$$\xrightarrow{\text{ضلع دیگر مستطیل رو پیدا کن}} 6 \times b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{6} \xrightarrow{\text{ساده کن}} b = \frac{3}{2} = 1/5$$

حل مسائل ماکزیمم و مینیمم به کمک معادله‌ی درجه‌ی دوم

غیر از چند مسئله‌ی معروفی که در کتاب درسی اشاره شده و در بالا به آن‌ها پرداختیم، می‌خواهیم به یک مدل از تست‌ها توجه کنیم که دسته‌ی متنوعی را هم شامل می‌شوند: فرم این تست‌ها این‌طوری است که در ظاهر خبری از عبارت درجه‌ی دوم، ریشه و... نیست! صورت تست یک مسئله‌ی ریاضی است که با یک سری توضیحات، در نهایت خواسته که یک چیزی ماکزیمم یا مینیمم شود. شاخصه‌ی اصلی تست‌هایی که چنین فرمی دارند و با کمک تابع درجه‌ی دوم حل می‌شوند، این است که دو تا متغیر در تست حضور دارد. (معمولاً مثبت‌اند، چون در سؤالات کاربردی و عملی حضور داریم...!) اما روش برخورد ما با این تست‌ها این‌طوری است:

❶ از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را بر حسب دیگری پیدا می‌کنیم؛ مثلاً m را بر حسب n . **ببین:** $m + 2n = 4 \Rightarrow m = 4 - 2n$

❷ حالا عبارتی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود می‌نویسیم و بعد متغیری را که در مرحله‌ی قبل بر حسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.

❸ **خب الان عبارتی که در مرحله‌ی ❷ پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه‌ی دوم است بر حسب یک متغیر. جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکزیمم شود، به تابع درجه‌ی دومی با a منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیمم شود، حتماً در تابع درجه‌ی دوم حاصل، a مثبت درمی‌آید؛ منظورمان از a ، ضریب x^2 است...**

❹ می‌دانید برای آن که عبارت $ax^2 + bx + c$ به ماکزیمم یا مینیمم خود برسد باید x مساوی $-\frac{b}{2a}$ شود و مقدار ماکزیمم یا مینیمم هم، $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

❶ **تست:** برای دو عدد مثبت x و y می‌دانیم: $3x + 2y = 24$. اگر xy بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار $y - x$ کدام است؟

پاسخ: ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$3x + 2y = 24 \xrightarrow{\text{y را پیدا کن}} y = \frac{24 - 3x}{2} \xrightarrow{\text{در رابطه بذار}} xy = x \left(\frac{24 - 3x}{2} \right) \xrightarrow{\text{کسر را تفکیک کن}} x \left(12 - \frac{3}{2}x \right)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 12x - \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} -\frac{3}{2}x^2 + 12x \xrightarrow{\text{ماکزیمم شود}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{3}{2})} = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$\xrightarrow{y = \frac{24 - 3x}{2}} y = \frac{24 - 3(4)}{2} = \frac{24 - 12}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow y - x = 6 - 4 = 2$$

❶ **مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه‌ی آن ۱۶ است، بیشترین مقدار خود را دارد. این مساحت چقدر است؟**

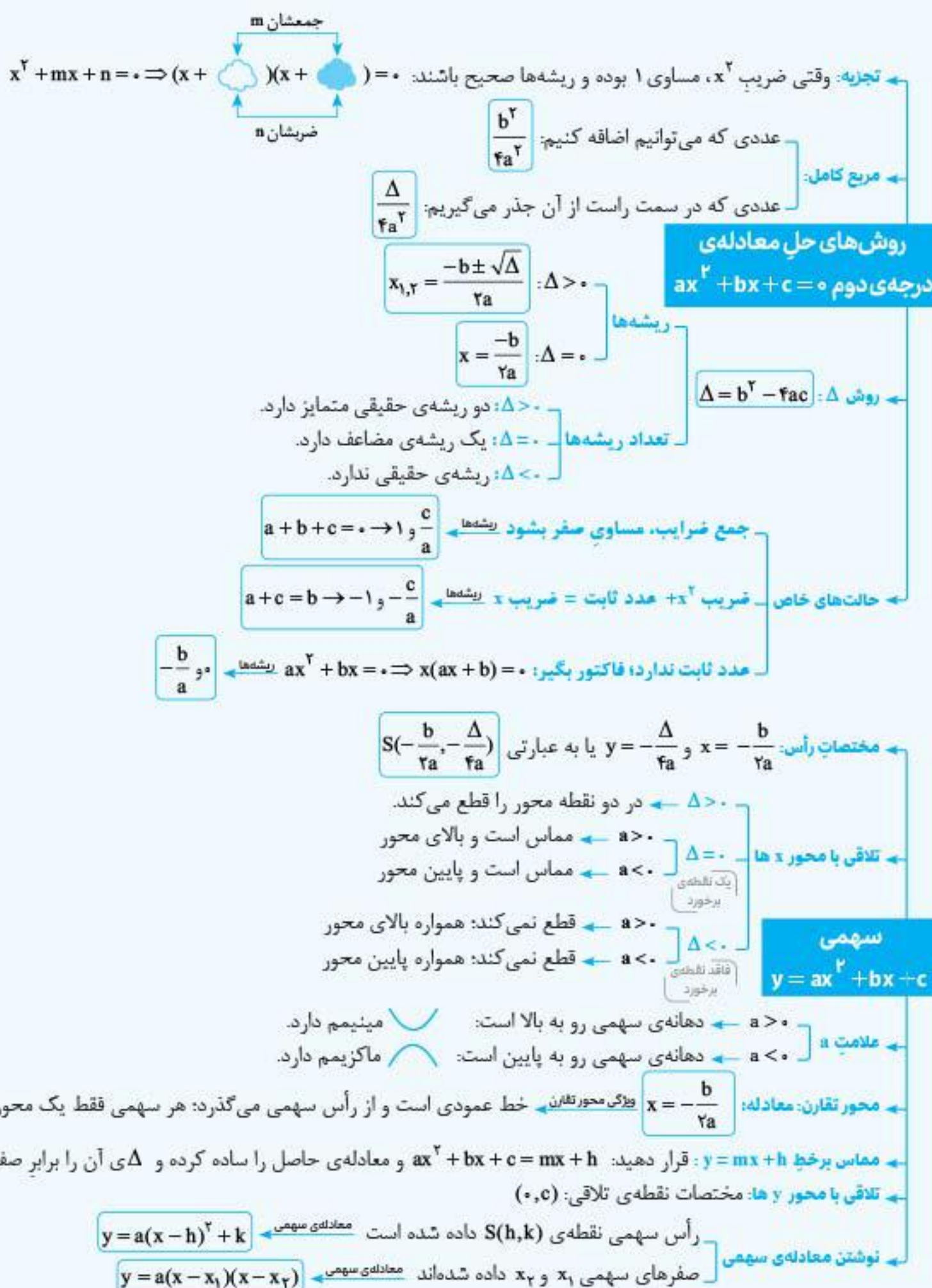
پاسخ: ۸ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴)

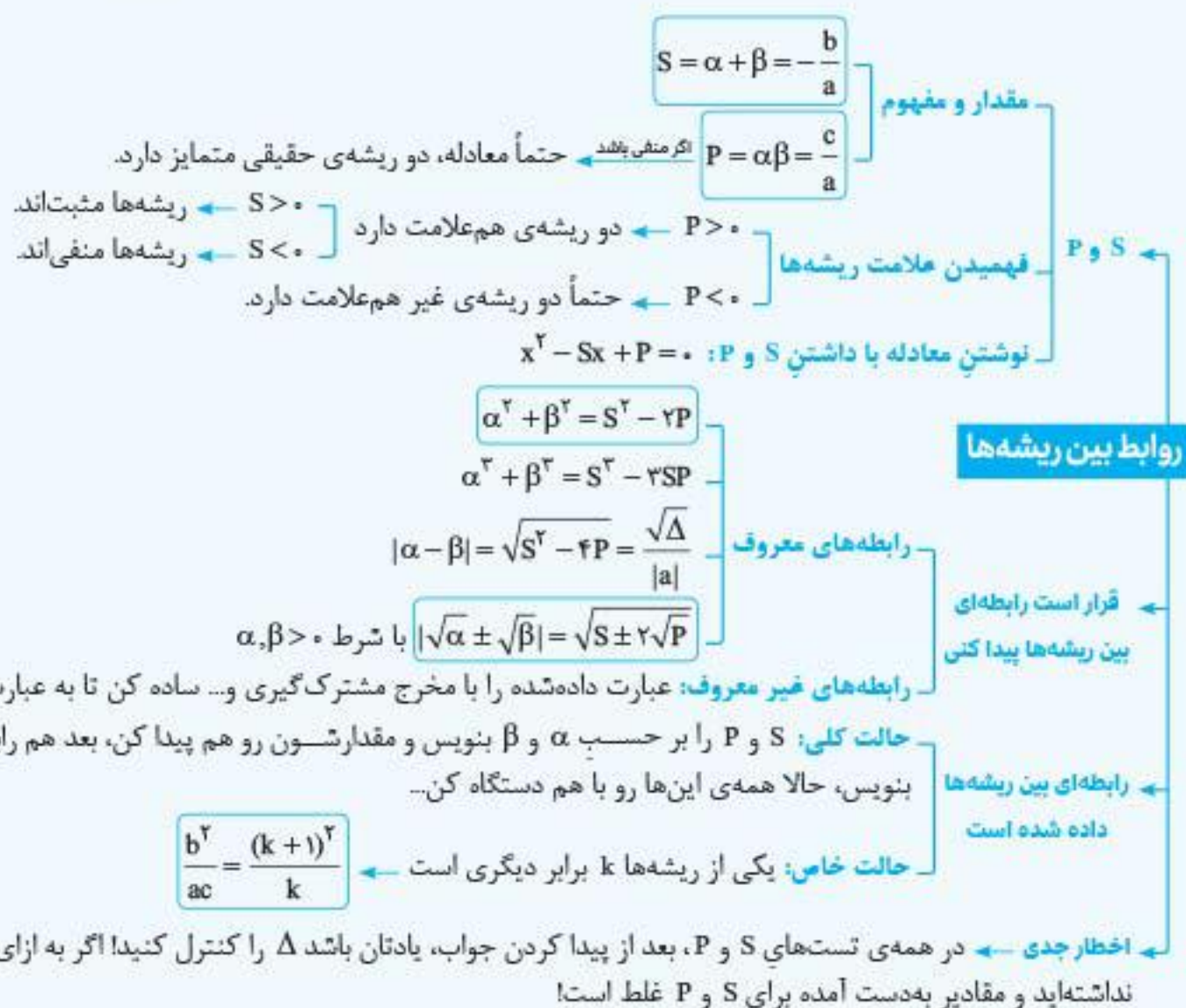


$$x + y = 16 \xrightarrow{\text{y را بر حسب x بنویس}} y = 16 - x \xrightarrow{S = \frac{1}{2}xy} S = \frac{1}{2}x(16 - x) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 8x - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = -\frac{1}{2}x^2 + 8x$$

$$\xrightarrow{S \text{ ماکزیمم شود}} S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4(-\frac{1}{2})(0)}{4(-\frac{1}{2})} = -\frac{64}{(-2)} = 32$$

فصل در یک نگاه





درجه‌ی اول: فرم کلی: $ax + b = 0$, $a \neq 0$ ← جواب معادله $x = -\frac{b}{a}$

$x^2 = k$

- $k > 0$ ← دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$ **بیین:** $x^2 = 4$ ، نتیجه می‌دهد $x = \pm 2$.
- $k = 0$ ← یک ریشه‌ی مضاعف صفر دارد.
- $k < 0$ ← ریشه ندارد: **بیین:** $x^2 = -3$.

حالت کلی‌تر ← اگر $u^2 = k$ و عبارتی بر حسب x باشد، نتیجه بگیرد $|u| = \sqrt{k}$ و بعد هم $u = \pm\sqrt{k}$ ($k > 0$).

معادله‌های ساده

جمع چندجمله‌ای غیر منفی، مساوی صفر شده است ← هر کدام را تک تک، مساوی صفر بنذار.

چندجمله‌ای به توان زوج و رادیکال فرجه‌ی زوج و قدرمطلق، عبارت‌های غیر منفی هستند: $| \dots |$, $\sqrt{\dots}$, $\sqrt[n]{\dots}$ (زوج)

حالت کلی: یک عبارت و مجذور آن در معادله دیده می‌شود ← آن عبارت را u بگیر.

حالت‌های خاص

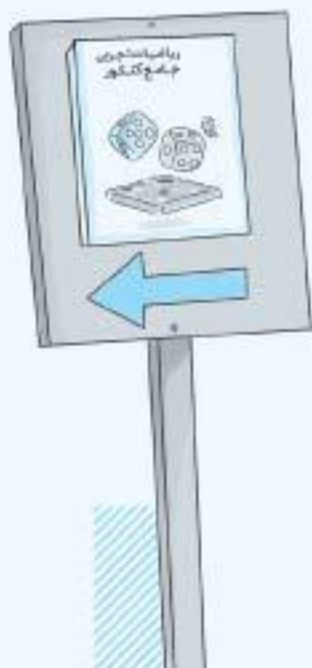
- $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ← بگیر $x^n = u$ ← $au^2 + bu + c = 0$
- $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ← بگیر $\sqrt{x} = u$ ← $au^2 + bu + c = 0$

که با تغییر متغیر حل می‌شوند

فالی متولد اردیبهشت

ریاضی را دوست داری ولی برای رسیدن به آن منتظر یک اتفاق هستی...

دریست
میدون ریاضی!



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

برای دوران مرور و جمع‌بندی، فقط تست‌های با شماره‌ی مشکی...

ایستگاه ۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

(کتاب درسی)

۴۱۶. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(3t-2)^2 = 4$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{7}{4}$

(کتاب درسی)

۴۱۷. ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x = 0$ چند واحد با یکدیگر اختلاف دارند؟

- (۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{6}$

۴۱۸. اگر عدد p ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، مقدار $2p^2 + 3p + 4$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

(کتاب درسی)

۴۱۹. کدام عبارت قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عامل درجه‌ی اول نیست؟

- (۱) $x^2 - 3x - 10$ (۲) $4x^2 - 10x + 8$ (۳) $x^2 - 11x + 10$ (۴) $4x^2 + 3x - 1$

(کتاب درسی)

۴۲۰. برای حل معادله‌ی $x^2 + 2x = 24$ به روش مربع کامل، چه عددی به طرفین معادله اضافه کنیم تا سمت چپ معادله، مربع کامل شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴) ۱

(کتاب درسی)

۴۲۱. ریشه‌های معادله‌ی $\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0$ کدام‌اند؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ و $\frac{-3}{2}$ (۲) $\frac{-3}{2}$ و $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ و $\frac{-3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}$

۴۲۲. در معادله‌ی $(3m+1)x^2 - 5x + 2 - 5m = 0$ یکی از ریشه‌ها -1 است. حاصل جمع ریشه‌ی دیگر معادله با m کدام است؟

- (۱) $\frac{18}{13}$ (۲) $\frac{17}{13}$ (۳) $\frac{70}{13}$ (۴) $\frac{71}{13}$

۴۲۳. معادله‌ی $x(2x-5) = a$ دو ریشه‌ی مساوی دارد. این ریشه کدام است؟

- (۱) $\frac{-5}{2}$ (۲) $\frac{-5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(کتاب درسی)

۴۲۴. اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن برادر بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

(کتاب درسی)

۴۲۵. مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی، ۲۹۰ است. حاصل ضرب این دو عدد چقدر است؟

- (۱) ۱۹۵ (۲) ۹۹ (۳) ۱۴۳ (۴) ۲۵۵

۴۲۶. معادله‌ی درجه‌ی دوم $mx^2 + mx + 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m < 0$ (۲) $0 < m < 4$ (۳) $m > 0$ (۴) $m < 4$

۴۲۷. معادله‌ی $ax^2 + x + 3 = 0$:

(۱) به ازای $a = \frac{1}{8}$ ، ریشه‌ی مضاعف دارد. (۲) به ازای $a = \frac{1}{12}$ ، دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد.

(۳) به ازای $a = \frac{1}{6}$ ، ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۴) به ازای هر عدد منفی a ، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۴۲۸. اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2 + \alpha + 2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲

(کتاب درسی)

۴۲۹. معادله‌ی $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$ را به روش تجزیه به صورت $(b-r)(b+s) = 0$ تبدیل کرده و حل کرده‌ایم. مقدار $\frac{r}{s}$ کدام است؟ ($r, s > 0$)

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

(کتاب درسی)

۴۳۰. برای حل معادله‌ی $S^2 - 3S + 3 = 0$ به روش مربع کامل به جایی می‌رسیم که باید از عددی جذر بگیریم. آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{-3}{4}$ (۴) $\frac{-21}{4}$

۴۳۱. کوچک‌ترین عدد صحیح m که به ازای آن معادله‌ی $x^2 - 3x - m + 9 = 0$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

آموزش ۴۵٪

تثبیت ۷۰٪

(خارج ۹۸)

۴۳۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر m سهمی به معادله‌ی $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ها است؟
 (۱) $1 < m < 5$ (۲) $2 < m < 5$ (۳) $2 < m < 4$ (۴) $2 < m < 6$

۴۳۳. کدام عبارت به ازای مقادیر مختلف m همواره قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عامل درجه‌ی اول است؟
 (۱) $x^2 - mx + 1 + m^2$ (۲) $(m^2 + 2)x^2 - x + 3$ (۳) $-2x^2 + 3x + m^2 + 2$ (۴) $(m+1)x^2 - 3x + m$

۴۳۴. اگر $x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ باشد، حاصل $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)
 (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{3}$

۴۳۵. فشار خون نرمال مردان برحسب میلی متر جیوه (mmHg) با رابطه‌ی $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی که فشار خون آن ۱۲۴ میلی متر جیوه باشد، کدام است؟ ($\sqrt{241} \approx 15.5$)
 (۱) ۲۶ (۲) ۲۶/۵ (۳) ۲۷/۵ (۴) ۲۷

۴۳۶. برای حل معادله‌ی $x^2 + 3x - 2 = 0$ به روش مربع کامل کردن، آن را به شکل $(x+a)^2 = b+2$ نوشته‌ایم. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) $4/75$ (۲) $4/5$ (۳) $3/5$ (۴) $3/75$

۴۳۷. معادله‌ی $ax^2 - 3x + a + 4 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

(۱) $(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$ (۳) $(-\frac{1}{2}, 2) - \{0\}$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}) - \{0\}$

۴۳۸. سعید از معلم ریاضی خود سنش را پرسید، معلم پاسخ داد: «سن من ۴ سال بعد، مربع سنی می‌شود که ۲۶ سال قبل داشتم». سن معلم ریاضی سعید کدام است؟
 (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۲۸ (۴) ۳۶

۴۳۹. عدد ۱۵ را به صورت مجموع دو عدد دیگر می‌نویسیم. اگر حاصل ضرب دو عدد به دست آمده $52/25$ باشد، اختلاف دو عدد کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) $5/5$

ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

۴۴۰. مختصات رأس سهمی به معادله‌ی $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 1$ کدام است؟

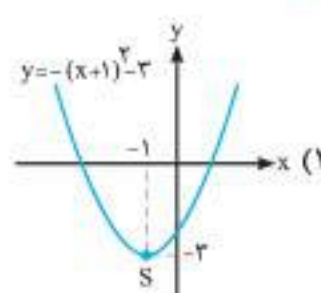
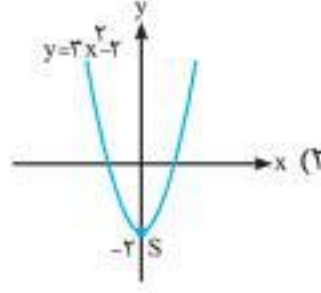
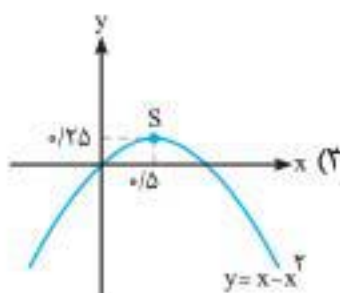
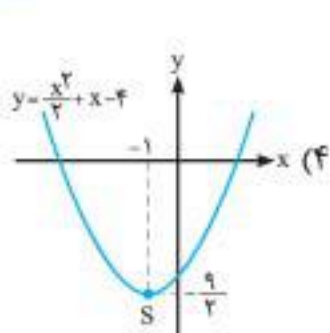
(۱) $(-\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$ (۲) $(\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$ (۳) $(\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$ (۴) $(-\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$

۴۴۱. اگر خط به معادله‌ی $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y = 1 - 2mx + 3x^2$ باشد، مقدار m کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۲

۴۴۲. طول رأس سهمی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - (4m-2)x + 30$ برابر ۳ است. درباره‌ی این سهمی کدام گزینه درست است؟
 (۱) محور x ها را قطع نمی‌کند.
 (۲) شکل سهمی رو به پایین است.
 (۳) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است.
 (۴) سهمی از نقطه‌ی $(2, 5)$ می‌گذرد.

(کتاب درسی)

۴۴۳. معادله‌ی کدام سهمی به درستی کنار آن نوشته نشده است؟



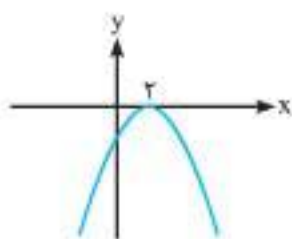
۴۴۴. سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 8x + 1$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
 (۱) چهارم (۲) سوم (۳) دوم (۴) اول

۴۴۵. به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور طول‌ها و مماس بر آن است؟

(۱) -۳ (۲) $-5/2$ (۳) $5/2$ (۴) ۳

۴۴۶. اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + 8x + c$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار c کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۸ (۳) -۴ (۴) -۶



۴۴۷. به ازای کدام مقدار a ، بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 2x - 12$ برابر با ۱۸۰ است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۴۸. به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

- (۱) $k > \frac{9}{4}$ (۲) $k < \frac{9}{4}$ (۳) $k > \frac{-9}{4}$ (۴) $k < \frac{-9}{4}$

۴۴۹. سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $\sqrt{2} - \sqrt{3} + x\sqrt{2} + 3x^2$ به ازای مقادیر مختلف x :

- (۱) گاهی مثبت و گاهی منفی است. (۲) گاهی منفی و گاهی صفر است. (۳) همواره منفی است. (۴) همواره مثبت است.

۴۵۰. نمودار تابع $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(0, 4)$ (۴) $(4, +\infty)$

(کتاب درسی)

۴۵۱. اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله‌ی خط تقارن این سهمی کدام است؟

- (۱) $x = -2$ (۲) $x = -1$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 1$

۴۵۲. نقطه‌ی $S(-1, -4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = 3x^2 + ax + b$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

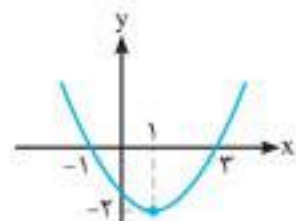
- (۱) -3 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2

(کتاب درسی)

۴۵۳. خط به معادله‌ی $y = \frac{3}{5}$ محور تقارن تابع $f(x) = x^2 - 4x + c$ را روی نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار c کدام است؟

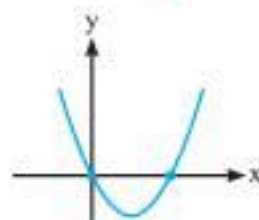
- (۱) $4/4$ (۲) $9/2$ (۳) $4/6$ (۴) $4/5$

۴۵۴. معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟



- (۱) $y = x^2 - x - 3$ (۲) $y = 2x^2 + x - 1$

- (۳) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ (۴) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$



۴۵۵. مقدار a کدام باشد تا نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + (2a-5)x + a^2 - 2$ مطابق شکل مقابل باشد؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۴۵۶. سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاطی به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام نقطه عبور می‌کند؟

(کتاب درسی)

- (۱) $(-2, -3)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 3)$ (۴) $(1, 2)$

(کنکور ۹۹)

۴۵۷. فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

۴۵۸. اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

(خارج ۹۶)

۴۵۹. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x ها است؟

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

۴۶۰. در سهمی به معادله‌ی $y = (x+2)^2 + (x-4)^2 - 18$:

- (۱) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور x ها قرار دارد. (۲) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور y ها قرار دارد.
(۳) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت منفی محور x ها قرار دارد. (۴) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور x ها قرار دارد.

(کانون فرهنگی آموزش)

۴۶۱. اگر نمودار تابع $y = mx^2 + (m+4)x + (2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $(0, 2]$ (۳) $(1, 3]$ (۴) $(0, 3]$

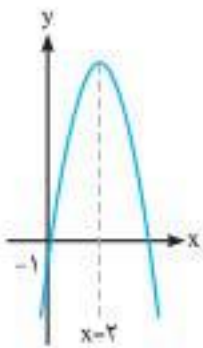
۴۶۲. اگر خط به معادله‌ی $x = \frac{2}{3}$ سهمی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای

با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{33}{16}$ (۳) $\frac{289}{16}$ (۴) $\frac{305}{16}$

۴۶۳. رأس سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 + bx - 3$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۶ (۳) ۴ و -۶ (۴) ۴ یا -۶



۴۶۴. سهمی به معادله‌ی $y = -2(x + 3m - 5)^2 + m + 2n$ مطابق شکل مقابل است. رأس سهمی به معادله‌ی $y = mx^2 + nx + 1$ کدام نقطه است؟

- (۱) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$
(۳) $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ (۴) $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$

۴۶۵. سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - (2m^2 + 1)x + m^4 + m^2 + \frac{1}{4}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

- (۱) محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند. (۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد.
(۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود. (۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

(خارج ۹۹)

۴۶۶. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(5, -7)$ (۲) $(5, -9)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(1, 5)$

۴۶۷. رأس سهمی به معادله‌ی $y = -3x^2 + (2m - 1)x + 5$ روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی $y - 2 = 0$ سهمی را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) $\pm \sqrt{2}$ (۴) قطع نمی‌کند.

۴۶۸. با توجه به ضابطه‌ی سهمی $y = x^2 - mx + m - 1$ به ازای کدام مقدار مثبت m ، مساحت مثلثی که دو رأس آن صف‌های این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی است، برابر ۱ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۶۹. اگر مجموعه‌ی نقاط سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - x + \frac{2}{3}$ دارای عرضی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{3}$ باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۷۰. سهمی به معادله‌ی $y = (2x + 1)(x + 8)$ با خط به معادله‌ی $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(5, 13)$ (۲) $(15, 23)$ (۳) $(7, 15)$ (۴) $(9, 25)$

۴۷۱. به ازای چه مقادیری از a ، سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a + 2)x$ هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

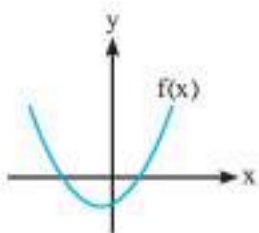
- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a > 0$ (۳) $a \leq -2$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۴۷۲. اگر رأس نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x - c$ نقطه‌ی $(-1, 3)$ باشد، مختصات رأس نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ کدام است؟

- (۱) $(4, -5)$ (۲) $(4, 5)$ (۳) $(0, 5)$ (۴) $(0, 3)$

۴۷۳. اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با نمودار مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $abc > 0$ (۲) $\alpha^2 + \beta^2 < 0$ (۳) $f(\frac{\alpha + \beta}{2}) = \frac{\Delta}{4a}$ (۴) $\alpha^2 + \beta^2 < 0$



ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

۴۷۴. هرگاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 9x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) $4/5$ (۴) $-4/5$

۴۷۵. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x - 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{9}$ (۲) $\frac{29}{9}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴) $\frac{28}{9}$

۴۷۶. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $m^2 - 2x + 1 = (3m - 1)x^2$ برابر با $\frac{1}{4}$ است. حاصل ضرب دو ریشه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۴۷۷. به ازای کدام مقدار m حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + m = 0$ مساوی ۴ است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار m

۴۷۸. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $|x' - x''|$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) 12 (۴) 3

۴۷۹. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $-3x^2 + (m+1)x + m = 0$ برابر با $\alpha = 1$ است. ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۴۸۰. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(3x^2 - 7x + 1)(2x + 1) = 0$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

(کنکور ۹۶)

۴۸۱. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۴۸۲. معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ دو ریشه‌ی α و β دارد و $\alpha < \beta$ است. حاصل عبارت $5\alpha^2 + 7\beta^2$ کدام است؟

- (۱) 30 (۲) 33 (۳) 21 (۴) 15

۴۸۳. اگر در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 1 (۳) 6 (۴) 12

۴۸۴. در معادله‌ی $x^2 - 20x + 64 = 0$ ، حاصل $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند).

- (۱) 6 (۲) $\sqrt{5}$ (۳) 2 (۴) $\sqrt{6}$

۴۸۵. مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)x - (\sqrt{2} + 1) = 0$ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - 1$ (۴) $\sqrt{6} - \sqrt{3} + 1$

۴۸۶. برای کدام مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a-1)x^2 + 2ax + 3 - a = 0$ معکوس یکدیگرند؟

- (۱) $a = 2$ (۲) $a = \frac{1}{2}$ (۳) $a = -1$ (۴) هیچ مقدار a

۴۸۷. برای کدام مقادیر k در معادله‌ی $kx^2 - 4x + k + 2 = 0$ یکی از ریشه‌ها ۳ برابر ریشه‌ی دیگر است؟

- (۱) 3 و 1 (۲) -3 و -1 (۳) 1 و -3 (۴) -1 و 3

(خارج ۹۹)

۴۸۸. معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m ، کدام است؟

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$ (۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

۴۸۹. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $3ax^2 + bx - a = 0$ مساوی $\frac{2}{3}$ است. ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۹۰. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 3x - 1 = 0$ با ریشه‌های α و β حاصل $\alpha^2 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^2$ کدام است؟

- (۱) 9 (۲) -9 (۳) -27 (۴) 27

۴۹۱. بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی $x^2 + 2x + 2c - 1 = 0$ رابطه‌ی $\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 = 0$ برقرار است. حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

- (۱) $-3/5$ (۲) -7 (۳) -4 (۴) -8

۴۹۲. جذر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ را با هم جمع کرده‌ایم. حاصل در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $2 + 2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

۴۹۳. اگر بین ضرایب معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه‌ی $c + 2b + 4a = 0$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{2c}$ (۲) $\frac{c}{2a}$ (۳) $-\frac{a}{2c}$ (۴) $-\frac{c}{2a}$

۴۹۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر

(کنکور ۹۹)

باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) 3 (۳) -1 (۴) $-\frac{5}{2}$

۴۹۵. در معادله‌ی $x^2 - 5x + m^2 + 5m = 0$ اگر $\alpha = 2$ یک ریشه‌ی آن باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^2 + \beta^2$ چقدر است؟ (β ریشه‌ی دیگر معادله است).

- (۱) 35 (۲) 19

(۳) -19 (۴) به مقدار m بستگی دارد.

۴۹۶. به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 5 + m = 0$ مجذور ریشه‌ی دیگر است؟

- (۱) 32 (۲) 2 (۳) -32 (۴) -3

۴۹۷. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $(\sqrt{4-2\sqrt{3}})x^2 + (1-\sqrt{3})x = 17$ درست است؟

- (۱) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
 (۲) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.
 (۳) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
 (۴) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.

(خارج ۹۲)

۴۹۸. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟
 (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

(خارج ۹۷)

۴۹۹. به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز است؟
 (۱) $-1 < m < 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $2 < m < 8$ (۴) $m > 8$

۵۰۰. نمودار تابع $f(x) = m^2x^2 - 3mx - 1$ به ازای مقادیر مختلف $m \neq 0$ ، همواره:

- (۱) بالای محور x ها قرار دارد.
 (۲) محور x ها را در یک طرف مبدأ قطع می‌کند.
 (۳) محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند.
 (۴) بر محور x ها مماس است.

۵۰۱. اگر از صفرهای تابع $f(x) = x^2 + 3x - c$ نیم واحد کم کنیم، حاصل ضرب صفرها چقدر تغییر خواهد کرد؟

- (۱) $\frac{c}{4}$ (۲) $\frac{c}{4} + c$ (۳) $\frac{c}{4}$ (۴) $\frac{c}{4} - c$

(کانون فرهنگی آموزش)

۵۰۲. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 290x + m^2 = 0$ مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند، حاصل $\sqrt{m+1}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۵۰۳. برای کدام مقدار b ، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + bx + b = 0$ ، رابطه‌ی $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 1$ برقرار است؟

- (۱) $-\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

۵۰۴. در تابع $f(x) = 2x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + \sqrt{5}$ با صفرهای α و β ، حاصل $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| + |\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt[3]{20}$

۵۰۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx + 2 = 0$ باشند و اعداد $x_1 + x_2$ و x_1x_2 تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۵۰۶. در معادله‌ی $4x^2 - 10x + 2m = 0$ ، دو برابر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر واحد بیشتر است. در این صورت مقدار m کدام است؟

- (۱) $5/76$ (۲) $2/88$ (۳) $5/4$ (۴) $2/52$

۵۰۷. ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ را α و β نامیده‌ایم. حاصل عبارت $A = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2} - \frac{\beta - 5}{\beta^2 - 6\beta + 7}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $-\frac{6}{5}$

۵۰۸. اگر در معادله‌ی $3x^2 - ax + b = 0$ ، بین اعداد a و b رابطه‌ی $2a + b = -12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله، کدام گزینه است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

- (۱) $-b$ (۲) $-\frac{b}{2}$ (۳) $-\frac{b}{3}$ (۴) $-\frac{b}{6}$

۵۰۹. در معادله‌ی $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند).

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{41}{2}$ (۴) $\frac{41}{8}$

۵۱۰. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ ، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ چقدر است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

(خارج ۹۵)

۵۱۱. به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

- (۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$

(کتک‌ور ۹۷)

۵۱۲. به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز است؟

- (۱) $m < -6$ (۲) $m > 3$ (۳) $0 < m < 3$ (۴) $3 < m < 6$

(کتک‌ور ۹۲)

۵۱۳. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

(کتاب درسی)

۵۱۴. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشند، در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (۲) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (۳) $x^2 + 2x - 2 = 0$ (۴) $x^2 - 2x - 4 = 0$

(کتاب درسی)

۵۱۵. مجموع دو عدد حقیقی، $\frac{1}{5}$ و حاصل ضرب آن دو -7 است. یکی از آن دو عدد کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{2}$ (۲) -2 (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

۵۱۶. دو عدد حقیقی که مجموعشان $2\sqrt{3}$ و حاصل ضربشان -1 است، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

- (۱) $\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3} = 0$ (۲) $\sqrt{3}x^2 - 6x - \sqrt{3} = 0$ (۳) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

۵۱۷. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۵۱۸. جواب‌های کدام معادله -2 برابر جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx = 2c$ است؟

- (۱) $x^2 - 2bx - 8c = 0$ (۲) $x^2 + 2bx + 8c = 0$ (۳) $x^2 - 2bx + 8c = 0$ (۴) $x^2 + 2bx - 8c = 0$

۵۱۹. معادله‌ای که ریشه‌هایش عددهای حقیقی $\sqrt{a} - \sqrt{a+1}$ و $\sqrt{a} + \sqrt{a+1}$ هستند، در کدام گزینه دیده می‌شود؟ ($a \neq 0$)

- (۱) $x^2 + 2\sqrt{a}x - 1 = 0$ (۲) $x^2 - 2\sqrt{a+1}x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 = 0$ (۴) $x^2 - 2\sqrt{a}x - 1 = 0$

۵۲۰. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن از 3 برابر قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ دو واحد بیشتر باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (۳) $x^2 + 8x - 11 = 0$ (۴) $x^2 - 8x + 4 = 0$

(کنکور ۹۲)

۵۲۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به صورت $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$ است؟

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۵۲۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (کنکور ۹۰)

- (۱) 27 (۲) 28 (۳) 29 (۴) 31

۵۲۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 10x - 16 = 0$ (۲) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (۳) $x^2 - 10x - 16 = 0$ (۴) $x^2 + 10x + 16 = 0$

۵۲۴. عددهای α و β صفرهای تابع $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 2$ هستند. ریشه‌های کدام معادله، اعداد $\frac{1}{\alpha} + 1$ و $\frac{1}{\beta} + 1$ است؟

- (۱) $4x^2 - 13x + 10 = 0$ (۲) $4x^2 + 13x + 10 = 0$ (۳) $4x^2 - 17x + 18 = 0$ (۴) $4x^2 + 17x + 18 = 0$

۵۲۵. به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟ (خارج ۹۶)

- (۱) 9 (۲) 11 (۳) 13 (۴) 15

۵۲۶. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -14 (۲) -12 (۳) -8 (۴) -6

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

۵۲۷. طول یک مستطیل 2 سانتی‌متر بیشتر از 4 برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل 45 cm^2 باشد، طول قطر آن چقدر است؟ (کتاب درسی)

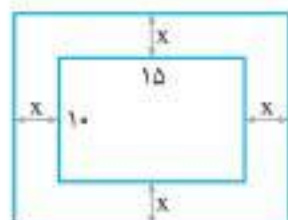
- (۱) $\sqrt{230}$ (۲) $\sqrt{231}$ (۳) $\sqrt{234}$ (۴) $\sqrt{236}$

۵۲۸. در لیگ فوتبال که هر تیم با بقیه‌ی تیم‌ها فقط یک بازی به صورت حذفی انجام می‌دهد، اگر تعداد کل بازی‌های انجام‌شده برابر 105 باشد، در این

(کتاب درسی)

لیگ چند تیم حضور دارند؟

- (۱) 16 (۲) 18 (۳) 14 (۴) 15



۵۲۹. یک عکس به اندازه‌ی 10 در 15 سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت 300 cm^2 قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های

(کتاب درسی)

عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس کدام است؟

- (۱) 15×20 (۲) $16 \times 18 / 75$ (۳) 12×25 (۴) $12 / 5 \times 24$

(کتاب درسی)

۵۳۰. معادله‌ی $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ است.

- (۱) دارای دو ریشه‌ی مثبت (۲) دارای چهار ریشه‌ی مثبت (۳) دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز (۴) فاقد ریشه‌ی حقیقی

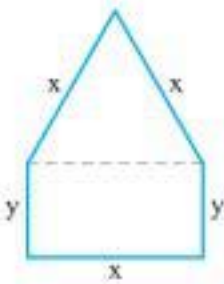
۵۳۱. مستطیلی را با کمک یک سیم به طول 20 ساخته‌ایم. اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود، مساحت مستطیل چقدر است؟

- (۱) 24 (۲) 35 (۳) 30 (۴) 25



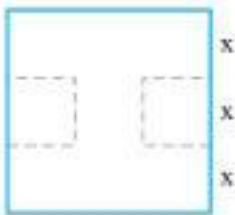
۵۳۲. یک ماهیگیر می‌خواهد مطابق شکل در کنار رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را فنس‌کشی کند. اگر او فقط هزینه‌ی 100 متر فنس‌کشی را داشته باشد، بیشترین سطحی که با این 100 متر می‌تواند ایجاد کند، چند مترمربع است؟ (کتاب درسی)

- (۱) 525 (۲) 1250 (۳) 1875 (۴) 3750



۵۳۳. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. حداکثر مساحت ممکن (جهت نوردی بیشتر) در بین پنجره‌هایی که محیطی برابر ۴m دارند، کدام است؟ (کتاب درسی)

$$\begin{array}{ll} \frac{4}{33}(6 - \sqrt{3}) & (۱) \\ \frac{4}{11}(6 + \sqrt{3}) & (۲) \\ \frac{4}{33}(6 + \sqrt{3}) & (۳) \\ \frac{4}{11}(6 - \sqrt{3}) & (۴) \end{array}$$



۵۳۴. در مربع شکل روبه‌رو، دو مربع کوچک‌تر، مطابق شکل به فاصله‌ی برابر از بالا و پایین مربع بزرگ‌تر، طوری جدا می‌کنیم که محیط و مساحت شکل باقی‌مانده با هم برابر باشند. طول ضلع مربع جدا شده کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

$$\begin{array}{ll} \frac{16}{7} & (۱) \\ \frac{15}{7} & (۲) \\ ۲ & (۳) \\ \frac{17}{7} & (۴) \end{array}$$

(کتاب درسی)

(۴) چنین مستطیلی وجود ندارد.

۵۳۵. در مستطیلی با مساحت ۵ واحد مربع و محیط ۹ واحد، عرض مستطیل کدام است؟ (۲) ۲/۵ (۱) ۲/۵

۵۳۶. درباره‌ی معادله‌ی $\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1} - 6 = 0$ کدام گزینه درست است؟

(۱) ریشه‌ی مضاعف دارد. (۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۳) چهار ریشه دارد. (۴) دو ریشه دارد.

(کتاب درسی)

۵۳۷. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ درست است؟

(۱) دو ریشه‌ی قرینه دارد. (۲) یک ریشه‌ی مثبت دارد. (۳) چهار ریشه‌ی متمایز دارد. (۴) دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۵۳۸. بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر همان قاعده برابر ۱۲ واحد است، بیشترین مساحت چند واحد مربع است؟

$$\begin{array}{ll} ۱۶ & (۱) \\ ۱۸ & (۲) \\ ۲۴ & (۳) \\ ۳۰ & (۴) \end{array}$$

۵۳۹. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای با مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی ۱۵، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{225}{2}\pi & (۱) \\ \frac{225}{4}\pi & (۲) \\ \frac{675}{4}\pi & (۳) \\ \frac{675}{2}\pi & (۴) \end{array}$$

۵۴۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\sqrt{10}$ و مجموع اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱۴ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} ۲۲ & (۱) \\ ۲۲/۵ & (۲) \\ ۲۱ & (۳) \\ ۲۱/۵ & (۴) \end{array}$$

۵۴۱. حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $(1-x^2)^2 - 19(x^2-1)^2 = 216$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} ۲ & (۱) \\ ۴ & (۲) \\ -۲ & (۳) \\ -۴ & (۴) \end{array}$$



۵۴۲. با استفاده از سیمی به طول ۸۰۰ سانتی‌متر، مستطیلی مانند شکل مقابل ساخته‌ایم. اگر مساحت این مستطیل ۲۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، طول آن چند سانتی‌متر است؟

$$\begin{array}{ll} ۵۰ & (۱) \\ ۱۰۰ & (۲) \\ ۱۲۵ & (۳) \\ ۲۰۰ & (۴) \end{array}$$

۵۴۳. اگر معادله‌ی $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{ll} (-\infty, -۴) & (۱) \\ (۴, +\infty) & (۲) \\ (-۴, ۴) & (۳) \\ (۴, ۹) & (۴) \end{array}$$

۵۴۴. معادله‌ی $x^2 - 4|x| + 2 = 0$ دارد.

(۱) دو ریشه‌ی مثبت (۲) چهار ریشه‌ی مثبت (۳) چهار ریشه‌ی هم‌علامت (۴) چهار ریشه‌ی دوبه‌دو قرینه

۵۴۵. حاصل ضرب ریشه‌های غیر صفر معادله‌ی $(x^2-1)^4 + (x^2-1)^2 - 2 = 0$ چقدر است؟

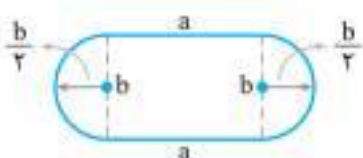
$$\begin{array}{ll} ۲ & (۱) \\ -۲ & (۲) \\ -۴ & (۳) \\ ۴ & (۴) \end{array}$$

۵۴۶. بین ارتفاع (h) و قاعده‌ی (b) متوازی‌الاضلاع‌ی رابطه‌ی $b+h=9$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت ممکن که با این متوازی‌الاضلاع می‌توان ساخت، چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} ۲۰/۲۵ & (۱) \\ ۲۰/۵ & (۲) \\ ۱۰/۲۵ & (۳) \\ ۱۰/۵ & (۴) \end{array}$$

۵۴۷. فاصله‌ی بین نقطه‌ای با طول a روی سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - 3x + 3$ از نقطه‌ای با همین طول روی خط به معادله‌ی $2y + x + 1 = 0$ را d می‌نامیم. مینیمم مقدار d چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{77}{16} & (۱) \\ \frac{31}{16} & (۲) \\ \frac{81}{16} & (۳) \\ \frac{131}{16} & (۴) \end{array}$$



۵۴۸. زمین تنیسی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط زمین ۶۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را چه مقدار بگیریم تا مساحت قسمت مستطیلی شکل زمین حداکثر مقدار ممکن شود؟ ($\pi \approx 3$) (کتاب درسی)

$$\begin{array}{ll} \frac{400}{3}m \times 100m & (۱) \\ \frac{800}{3}m \times 60m & (۲) \\ 150m \times 100m & (۳) \\ 150m \times 60m & (۴) \end{array}$$

برای ۱۰۰٪

۵۴۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{(3\alpha-2)^2} + \frac{1}{(3\beta-2)^2}$ کدام گزینه خواهد بود؟

(۴) $\frac{542}{289}$

(۳) $\frac{600}{289}$

(۲) $\frac{155}{289}$

(۱) $\frac{710}{289}$

۵۵۰. ریشه‌های کدام معادله اعداد $(\sqrt{3}-1)^4$ و $(\sqrt{3}+1)^4$ هستند؟

(۴) $x^2 - 56x - 16 = 0$

(۳) $x^2 + 56x - 16 = 0$

(۲) $x^2 - 56x + 16 = 0$

(۱) $x^2 + 56x + 16 = 0$

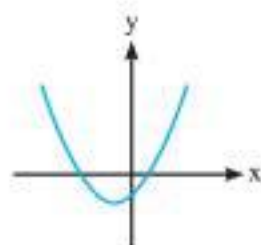
۵۵۱. اگر شکل مقابل نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $bc < 0$

(۲) $bc > 0$

(۳) $bc = 0$

(۴) $bc \geq 0$



۵۵۲. فاصله‌ی بین دو ریشه‌ی یک سهمی برابر ۴ واحد است. اگر رأس سهمی نقطه‌ی $(1, 1)$ باشد، معادله‌ی سهمی کدام است؟

(۴) $y = \frac{-1}{4}(x-1)(x+3)$

(۳) $y = \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

(۲) $y = (x-1)(x+3) + 1$

(۱) $y = -x^2 + 2x + 3$

۵۵۳. بین ضرایب معادله $ax^2 - bx - c = 0$ روابط $c = a + b$ و $2b = 4a - c$ برقرار است. حاصل جمع توان سوم ریشه‌های معادله کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۸

(۲) ۹

(۱) ۷

(کنکور ۸۸)

۵۵۴. به ازای کدام مقادیر m از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

(۴) $\frac{3}{2} < m < 2$

(۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$

(۲) $0 < m < 2$

(۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$

۵۵۵. رابطه‌ی $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 56$ بین صفرهای تابع $f(x) = x^2 - bx - 3b^2$ برقرار است. نمودار تابع نسبت به کدام خط نمی‌تواند قرینه باشد؟

(۴) $x = -1$ و $x = 1$

(۳) $x = -1$

(۲) $x = 1$

(۱) $x = \frac{1}{2}$

آزمون فصل

⌚ زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

(کنکور ۹۸)

۵۵۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است؟

(۴) $-1 < m < 2/5$

(۳) $-1 < m < 3/5$

(۲) $-2 < m < 3/5$

(۱) $-2 < m < 2/5$

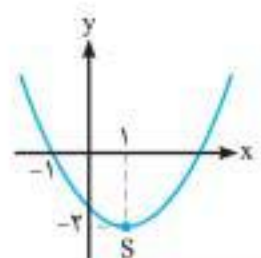
۵۵۷. حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 32(x^2 + x) + 240 = 0$ کدام است؟

(۴) -۲۴۰

(۳) -۱۲۰

(۲) ۲۴۰

(۱) ۱۲۰



۵۵۸. معادله‌ی سهمی مقابل در کدام گزینه آمده است؟

(۲) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

(۴) $y = x^2 - 2x - 1$

(۱) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$

(۳) $y = 2(x-1)^2 - 2$

۵۵۹. در متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل مقابل، مجموع طول دو ضلع مجاور برابر با ۱۱ واحد طول است.

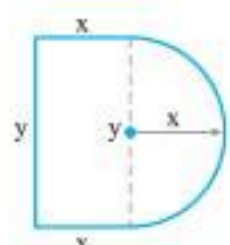
حداکثر مقدار مساحت ممکن برای این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4} \times 121$

(۳) $\frac{1}{4} \times 121$

(۲) $\frac{7}{8} \times 121$

(۱) $\frac{3}{8} \times 121$



۵۶۰. می‌خواهیم با طنابی به طول ۷۰ متر، سطحی متشکل از یک مستطیل و یک نیم‌دایره ایجاد کنیم. حداکثر مساحت ایجادشده برابر

است با: $(\pi \approx 3)$

(۲) 1150 m^2

(۴) 350 m^2

(۱) 1050 m^2

(۳) 1225 m^2

۵۶۱. به ازای کدام مقدار a ، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - x + a = 0$ ، مجموع معکوس ریشه‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) هیچ مقدار a
۵۶۲. اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx + 3 = 0$ به صورت $\left\{\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}, \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}\right\}$ باشد، مقدار b کدام است؟
 (۱) $\pm 2\sqrt{6}$ (۲) $\pm 2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $2\sqrt{3}$
۵۶۳. ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $(\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{5}x + \sqrt{2} = 1$ چقدر از ریشه‌ی کوچک‌تر آن بیشتر است؟
 (۱) $\sqrt{2}+1$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-1$
۵۶۴. اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^2 + bx - c = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله اعداد $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است؟
 (۱) $cx^2 + bx - a = 0$ (۲) $cx^2 - bx - a = 0$ (۳) $cx^2 - bx + a = 0$ (۴) $cx^2 + bx + a = 0$
۵۶۵. به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟
 (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $2 < a < 5$ (۳) $2 < a < 14$ (۴) $5 < a < 14$
۵۶۶. اگر صفرهای تابع درجه‌ی دوم $y = 3x^2 + bx + c$ برابر -3 و 5 باشند، کمترین مقدار این سهمی کدام است؟
 (۱) -۳۶ (۲) -۴۸ (۳) ۴۲ (۴) ۵۴
۵۶۷. نمودار سهمی $y = (2m+3)x^2 + 6x + m$ همواره بالای محور x هاست. حدود m کدام است؟
 (۱) $-\frac{3}{2} < m < 0$ (۲) $m > \frac{3}{2}$ (۳) $0 < m < \frac{3}{2}$ (۴) $m > -\frac{3}{2}$
۵۶۸. تابع درجه‌ی دوم $y = x^2 + bx + 8$ نسبت به خط $x = 3$ متقارن است. این تابع محور x ها را در چه طولی قطع می‌کند؟
 (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶
۵۶۹. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $-x^2 + 8x - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۶۴ (۴) ۴
۵۷۰. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + x - 5 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{\alpha}{\beta}-1, \frac{\beta}{\alpha}-1\right\}$ است؟
 (۱) $\Delta x^2 + x - 21 = 0$ (۲) $\Delta x^2 - x - 21 = 0$ (۳) $\Delta x^2 - 21x + 21 = 0$ (۴) $\Delta x^2 + 21x + 21 = 0$

آگهی‌های کنکور رو صد پزلی...

خوندن درس، حل تست و رفع اشکال، مرور فصل و بعدش حل تست‌های مبحثی استاندارد در قالب آزمون‌های هدفمند؛ راهش اینده! حالا به کتاب «آزمون + PLUS ریاضیات تجربی» تکیه کن. صد آزمون برای صد درصد

